紀伊國屋数学叢書

14-A

戸田宏　三村護

リー群の位相

<上>

線型代数からKO-群の周期性へ

紀伊國屋書店

まえがきにかえて

学生A：今，教養部で行列や行列式などの線型代数を学んでいるのですが…2次や3次のときは平面や立体の図形と関係づけて，幾何的なイメージがもてますが，一般の次元となると，代数的な数式の上では解ったつもりでも，どうも幾何的なとらえ方がよく解らないんです．

学生B：それは学部へ来ても同じようなものだよ．多様体だ，トポロジーだとヤタラ抽象的なものばかり出て来て…．そういうものばかり聞かされていると，教養で学んだ行列なんかどこかへ消えてしまいかねないんだ．

学生A：しかし，線型代数が教養の課程にあるということは，それが基礎的に重要なものだからではないのですか．

学生B：代数はもちろん，幾何や解析でも線型代数はよく使われている，というよりは，中学，高校の数学における算術の様な役割をしているのではないかと思うね．

学生C：僕はユークリッド幾何の問題を考えるのが好きでしたが，高等数学にはそのようなものはないのでしょうか．

学生B：代数幾何，微分幾何やトポロジーはそのようなものらしいけれど，講義で聞かされる理論が直感とよく結びつかないので，実際弱っているんだ．あそこに，P先生がいるから，お説拝聴といこうか．

＊　＊　＊

先生P：現代数学というものは，先へ先へと進んで行くので，教養部から学部へ進んで来た人が，数学の専門の講義を聞いて面喰らうのは仕方がないようですね．しかも，学部で講義するものは各専門のほんの入口にしか過ぎないんです．時間があれば，色々と実例とか雑談とかを交えて，もっとゆっくり理解して貰うのが最上だと思いますが…．結局は，学生各人がそれぞれのやり方で，ギャップを埋めていくしかない

んでしょうね.

学生B：それでは先生の専門の方で何かいい本はありませんか.

学生A：それも，教養部で学んでいることと関係のあるようなものがいいんですが.

先生P：いま書き上げたばかりの『リー群の位相』という本がありますが，これなどはどうですか. Lie群(リー群)というのは，一般線型群や直交群を一般化したものです. この本の上巻で扱われているのは，行列で表わされる線型群ばかりですよ.

学生B：位相というのは，あのトポロジーのことらしいですが，基本群はともかく，ホモロジーやホモトピーはどうも難かしいし，幾何的なイメージがつかみにくいですね.

先生P：トポロジーにおける諸概念，特にコホモロジーは定義や基本的性質の説明や理解に時間がかかるのがどうも面白くないんです. この本はそれを使おうという立場ですから，基本的性質の証明などは抜きにして，これはこういうものだと悟って読み飛ばしてほしいですね. 色々な古典群のトポロジーの結果を知ってから，元へ戻って定義や性質を考えるのも悪くはないでしょう.

学生C：この本は初学者にも解るように，ていねいに書いてあるのですか.

先生P：いや，全く不親切に出来ていますね. 数学では本人の思考が大事で，手取り足取りの教育では読む人のアイディアを殺してしまいます. しかし，出来るだけ引用は少なくしましたので，教養部で線型代数を学んだ人なら読めるようにしてあるつもりです. 後半の方はかなり高度なことや，どこの本や論文にも書いていない部分もありますけれどね.

先生Q：Lie群とLie環は切っても切れない関係があるんやおまへんか. この本はその点Lie環については全く不親切やないか.

先生P：Lie環については僕達もよく知らないし，偉い先生方の本が，和書でも洋書でもたくさん出ています. それに，あまり代数的議論はしたくなかったので最小限に止めました.

学生A：本の各所に$\Longleftrightarrow$とか$\Longrightarrow$の記号があるのは何ですか.

先生P：A$\Longleftrightarrow$Bは「Aであるための必要十分条件はBである」または「Aは

Bによって定義される」の2通りの意味に使っています．A$\Longrightarrow$Bは「AならばBである」または「Aが成り立つから従ってBも成り立つ」のように読んで下さい．

先生Q：Bottの周期性をKO-群でも証明してあるのはええと思うけど，Lie群の位相という表題やのに，出て来るのは古典群かせいぜいspinor群というのは羊頭狗肉と違いまっか．

先生P：下巻ではコンパクトLie群の一般論や例外群のことも詳しく書きますので，それまで御辛抱下さい．

1978年3月　京都にて

目　　次

まえがきにかえて

第1章　古　典　群

§1　位相群と等質空間 ……1

§2　古典群 ……11

§3　正規行列の対角化 ……21

§4　行列の指数写像と古典群の極分解 ……28

§5　微分多様体と Lie 群 ……33

第2章　被覆空間とファイバーバンドル

§1　基本群と被覆空間 ……43

§2　ファイバーバンドルの基本的性質 ……51

§3　ホモトピー群とファイバー空間 ……59

§4　被覆群 ……66

§5　Lie 群と Lie 環 ……74

§6　分類空間 ……82

第3章　古典群とその等質空間のコホモロジー

§1　位相空間のコホモロジー環 ……90

§2　ファイバー空間のコホモロジー(Serre のスペクトル系列) ……102

§3　Gysin 完全系列の応用 ……113

§4　Leray-Hirsch の定理と Weyl 群の作用 ……122

§5　特性類とその間の関係 ……131

§6　古典型対称空間のコホモロジー ……142

第4章　*KF*-群とホモトピー群の周期性

§1　ホモトピー論の基礎概念 ……150

§2 H-空間のホモロジー環と Hopf 代数 ……163
§3 無限次元対称空間 ……175
§4 ベクトルバンドルと $\boldsymbol{KF}$-群 ……186
§5 $\boldsymbol{KF}$-群の周期性 ……196
§6 古典群と等質空間のホモトピー群 ……206
あとがき ……220
索 引 ……230

下巻の内容

第5章 コンパクト Lie 群
第6章 Morse-Bott の理論
第7章 例外 Lie 群のコホモロジー

第1章　古 典 群

この章では，まず§1で位相群とその等質空間の一般的性質を述べ，§2においてはその重要な例としての古典群を定義し，それらを具体的に考察する．即ち，§3では正規行列の対角化を使用することにより，コンパクト連結古典群は極大トーラスの和集合であることを示す．さらにWeyl群の形も具体的に与える．第3，4章の議論においては，古典群個々の性質がよく使われ，Lie群の一般論はそれ程重要ではない．本書ではコンパクトLie群を主として考察するが，古典群の場合，その位相的性質はコンパクト古典群について調べれば十分であること，即ち，古典群はユークリッド空間とコンパクト古典群の直積に同相であることを§4で示す．なお，コンパクトLie群の一般論は第5章で述べる．§5では微分多様体およびLie群の基本的性質を述べ，古典群はLie群の一種であることを示す．

§1　位相群と等質空間

位相群の定義

位相群は，連続的な群構造をもつ位相空間であるということができる．これを正確に述べると次のようになる．

定義　集合Gに次のような構造が与えられているとき，Gを**位相群**という：

(i)　Gは**群**である．即ち，単位元$e\in G$，積$\mu: G\times G\to G$ $(\mu(g,g')=gg'$と書く$)$および逆元$\iota: G\to G$ $(\iota(g)=g^{-1}$と書く$)$が与えられていて，次の等式(群の公理)をみたす．

$$ge=eg=g, \qquad (gg')g''=g(g'g''), \qquad gg^{-1}=g^{-1}g=e$$

(ii)　Gは$\boldsymbol{T_1}$-**空間**である．即ち，Gの部分集合(開集合)O_λの系$\mathcal{O}=\{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$

が与えられていて，開集合の公理：

$$\phi, G\in\mathcal{O};\quad O_\alpha\in\mathcal{O}\Longrightarrow\cup_\alpha O_\alpha\in\mathcal{O};\quad O_1, O_2\in\mathcal{O}\Longrightarrow O_1\cap O_2\in\mathcal{O}$$

をみたし(て**位相空間**であり)，さらに，次の T_1- 分離公理をみたす：

G の各元 g は閉集合($\Longleftrightarrow G-g\in\mathcal{O}$)

(iii) $\mu: G\times G\to G$ および $\iota: G\to G$ は連続である．

結合法則 $(gg')g''=g(g'g'')$ によって，この元は括弧をはずして，$gg'g''$ と表わされることとか，位相空間 X, Y の間の写像

$f: X\to Y$ が**連続**$\Longleftrightarrow Y$ の開集合 O の逆像 $f^{-1}(O)$ は X の開集合

$\Longleftrightarrow Y$ の閉集合(開集合の補集合)の逆像は閉集合

という連続写像の定義，積空間 $X\times Y$ の位相は

O が $X\times Y$ の**開集合**$\Longleftrightarrow O$ の各点 (x, y) に対して，$x\in O_X$，$y\in O_Y$，

$O_X\times O_Y\subset O$ となる開集合 O_X, O_Y がある

によって与えられる，等のことはよく知られた所であろう．

通常の群および位相空間に関する用語はそのまま位相群にも使われる：

G は**可換**(位相群)$\Longleftrightarrow$任意の $g, g'\in G$ について，$gg'=g'g$

H は G の**部分群**$\Longleftrightarrow H$ は G の部分空間で，$h, h'\in H$ ならば $h^{-1}h'\in H$

N は G の**正規部分群**$\Longleftrightarrow N$ は G の部分群で，任意の $g\in G$ について，

$gN=Ng$

一般に，G の部分集合 A, B に対して，次の記号を用いる：

$A\cdot B=\{ab\,|\,a\in A,\ b\in B\}$

G の部分集合 A の**正規化群** $N(A)=\{g\in G\,|\,gA=Ag\}$

G の部分集合 A の**中心化群** $Z(A)=\{z\in G\,|$ 任意の $a\in A$ について，

$za=az\}$

G の**中心** $Z(G)=\{z\in G\,|$ 任意の $g\in G$ について $gz=zg\}$

G の**閉(開)部分群** $H\Longleftrightarrow H$ は G の部分群かつ G の閉(開)集合．

位相群の準同型においては，連続性も要求される．即ち，

$f: G\to G'$ が位相群の**準同型**$\Longleftrightarrow f$ は連続かつ $f(gg')=f(g)f(g')$ をみたす．

位相群 G, G' は**同型**$\Longleftrightarrow$位相群の準同型 $\varphi: G\to G'$，$\psi: G'\to G$ が存在

して，$\psi\circ\varphi=1_G$(恒等写像)，$\varphi\circ\psi=1_{G'}$．

上の φ は群としては同型対応，位相空間としては同相写像である．

簡単な位相群の例を挙げよう．

(1.1)　群 G が与えられたとき，集合 G に疎な位相($\Longleftrightarrow G$ の部分集合はすべて開集合 $\Longleftrightarrow G$ の各元は閉かつ開)を与えることにより，G は位相群となり，**離散群**とよばれる．

記号　$\boldsymbol{R}$：実数全体

$\boldsymbol{C}$：複素数全体($\boldsymbol{C}=\{a+b\boldsymbol{i}\,|\,a,b\in\boldsymbol{R}\}$，$\boldsymbol{i}^2=-1$)

$\boldsymbol{H}$：四元数全体($\boldsymbol{H}=\{a+b\boldsymbol{i}+c\boldsymbol{j}+d\boldsymbol{k}\,|\,a,b,c,d\in\boldsymbol{R}\}$，$\boldsymbol{i}^2=\boldsymbol{j}^2=\boldsymbol{k}^2=-1$，$\boldsymbol{ij}=-\boldsymbol{ji}=\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{jk}=-\boldsymbol{kj}=\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{ki}=-\boldsymbol{ik}=\boldsymbol{j}$)

$\boldsymbol{F}$：$\boldsymbol{R}$，$\boldsymbol{C}$，$\boldsymbol{H}$ のいずれか．

よく知られているように，$\boldsymbol{R}$，$\boldsymbol{C}$ は可換体，$\boldsymbol{H}$ は非可換体である．**共役元**を

$$\bar{a}=a\quad(a\in\boldsymbol{R}),\qquad \overline{a+b\boldsymbol{i}}=a-b\boldsymbol{i}\quad(a+b\boldsymbol{i}\in\boldsymbol{C}),$$

$$\overline{a+b\boldsymbol{i}+c\boldsymbol{j}+d\boldsymbol{k}}=a-b\boldsymbol{i}-c\boldsymbol{j}-d\boldsymbol{k}\quad(a+b\boldsymbol{i}+c\boldsymbol{j}+d\boldsymbol{k}\in\boldsymbol{H})$$

で与えるとき，$x\in\boldsymbol{F}$ の**絶対値**が

$$|x|=\sqrt{x\bar{x}}=\sqrt{\bar{x}x}\geq 0$$

により定義される．($x=a+b\boldsymbol{i}+c\boldsymbol{j}+d\boldsymbol{k}$ のとき，$|x|=\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$)

このとき，2点 $x,y\in\boldsymbol{F}$ の距離を $|x-y|$ で定義することにより，$\boldsymbol{F}$ は距離空間となり，通常の方法 (O が $\boldsymbol{F}$ の開集合 $\Longleftrightarrow x\in O$ に対して，$\varepsilon>0$ が存在して，$|x-y|<\varepsilon\Longrightarrow y\in O$) によって位相空間となる．さらに，この位相に関して，$\boldsymbol{F}$ における四則演算は，0 で割ることを除いて，連続である．よって，

(1.2)　$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{R}$，$\boldsymbol{C}$，$\boldsymbol{H}$ は加法(和)に対して可換な位相群であり，$\boldsymbol{F}^*=\boldsymbol{F}-\{0\}$ は乗法(積)に関して位相群($\boldsymbol{F}=\boldsymbol{R},\boldsymbol{C}$ のときは可換)である．

記号　$\boldsymbol{F}^n=\{(x_1,\ \cdots,\ x_n)\,|\,x_i\in\boldsymbol{F}\}$：$\boldsymbol{F}(=\boldsymbol{R},\boldsymbol{C},\boldsymbol{H})$上の $\boldsymbol{n}$ **次元数ベクトル空間**

$\boldsymbol{F}^n$ において，和および $\boldsymbol{F}$ の作用は

$$(x_1,\ \cdots,\ x_n)+(y_1,\ \cdots,\ y_n)=(x_1+y_1,\ \cdots,\ x_n+y_n),$$

$$x(x_1,\ \cdots,\ x_n)=(xx_1,\ \cdots,\ xx_n),\quad (x_1,\ \cdots,\ x_n)x=(x_1x,\ \cdots,\ x_nx)$$

で与えられる．また**ノルム**(絶対値，長さ)は

$$\|(x_1,\ \cdots,\ x_n)\|=\sqrt{|x_1|^2+\cdots+|x_n|^2}$$

で与えられる．上と同様に $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{F}^n$ の距離を $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$ で与えて，$\boldsymbol{F}^n$ は距離空間となる．特に $\boldsymbol{R}^n$ は $\boldsymbol{n}$ **次元ユークリッド空間**とよばれるものである．

(1.3)　$\boldsymbol{F}^n$ ($\boldsymbol{F}=\boldsymbol{R}$，$\boldsymbol{C}$，$\boldsymbol{H}$) は和に関して可換な位相群である．$\boldsymbol{C}^n$ は $\boldsymbol{R}^{2n}$ と，

$\boldsymbol{H}^n$ は $\boldsymbol{C}^{2n}$ および $\boldsymbol{R}^{4n}$ と位相群として同型である．

実際，同型対応

$$\boldsymbol{r}: \boldsymbol{C}^n \longrightarrow \boldsymbol{R}^{2n}, \qquad \boldsymbol{c}': \boldsymbol{H}^n \longrightarrow \boldsymbol{C}^{2n}$$

を次のように与えることができる：

(1.3)′　$\boldsymbol{r}(a_1+b_1\boldsymbol{i}, \cdots, a_n+b_n\boldsymbol{i})=(a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n)$, $a_i, b_j \in \boldsymbol{R}$

$\boldsymbol{c}'(\alpha_1+\boldsymbol{j}\beta_1, \cdots, \alpha_n+\boldsymbol{j}\beta_n)=(\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \beta_1, \cdots, \beta_n)$, $\alpha_i, \beta_j \in \boldsymbol{C}$

(1.4)　$\boldsymbol{F}$ 上のベクトル空間の準同型 $f: \boldsymbol{F}^n \to \boldsymbol{F}^m$ $(f(\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{y})=\alpha f(\boldsymbol{x})+\beta f(\boldsymbol{y})$, $\alpha, \beta \in \boldsymbol{F})$ は可換位相群の間の準同型である．

位相群の作用と等質空間

定義　位相群 G と位相空間 X について，次の条件(1), (2)をみたす連続写像

$$\mu=\mu_X: G\times X \longrightarrow X \quad (\text{または } X\times G \longrightarrow X)$$

を，G の X への左（または右）からの**作用**という．X を **G-空間**ということもある．$\mu(g, x)=gx$（または $=xg$）と表わすとき，

(1)　$g(g'x)=(gg')x$（または $(xg)g'=x(gg')$）

(2)　G の単位元に e ついて，$ex=x$（または $xe=x$）

また，この作用が

効果的 $\Longleftrightarrow$ すべての $x\in X$ につき $gx=g'x$ $(xg=xg')$ ならば $g=g'$,

推移的 $\Longleftrightarrow$ 任意の $x, x'\in X$ に対し $gx=x'$ $(xg=x')$ となる g がある．

記号　左からの作用について，$L_g: X\to X \Longleftrightarrow L_g(x)=gx$

右からの作用について，$R_g: X\to X \Longleftrightarrow R_g(x)=xg$

作用 μ の連続性から，L_g（または R_g）は連続写像で，条件(1), (2)は

(1)′　$L_{g'}\circ L_g=L_{g'g}$　$(R_{g'}\circ R_g=R_{gg'})$,

(2)′　$L_e=1_X$　$(R_e=1_X)$

と同値である．従って，L_g と $L_{g^{-1}}$ (R_g と $R_{g^{-1}}$)は互いに逆写像で，これらは X からそれ自身への同相写像である．このことから，$L_g(R_g)$ を g による**左(位相)変換**（**右(位相)変換**）といい，G は X の**位相変換群**であるという．

左作用 $\mu: G\times X\to X$ と右作用 $\mu': X\times G\to X$ は

$$\mu(g, x)=\mu'(x, g^{-1})$$

によって，1対1に対応する．従って，以後主として一方の作用について考え

れば十分である．

定義　位相空間 X は位相群 G の**等質空間**である$\Longleftrightarrow$位相群 G の位相空間 X への推移的な作用がある．

等質空間 X の任意の2点 x, x' に対して，x を x' に写す同相写像 $L_g: X\to X$ があるから，X の各点における局所的性質は点に無関係であるということができる．これが等質空間の名の起こりである．明らかに，

(1.5)　位相群 G の部分群 H は G に作用し，G はそれ自身の等質空間である．

商空間と等質空間

一般に，位相空間 X の点の間に同値関係 $\sim$ が与えられているとき，$\sim$ による同値類の集合 $X/\sim$ に，次にような位相を導入してえられる位相空間 $X/\sim$ を X の $\sim$ による**商空間**という．$\pi: X\to X/\sim$ を同値類をとる対応とするとき，

$$A \text{ が } X/\sim \text{ の開(閉)集合} \Longleftrightarrow \pi^{-1}(A) \text{ は } X \text{ の開(閉)集合}.$$

このとき，π は連続であり，**射影**とよばれる．位相空間 X から集合 Y への全射 $f: X\to Y$ が与えられたとき，$x\sim x' \Longleftrightarrow f(x)=f(x')$ によって，$Y=X/\sim$ とみなされる．この Y に商空間の位相を入れたものを，f による X の**等化空間**という．また，Y が位相空間で，その位相が f による等化空間の位相と一致するとき**等化位相**といい，f は**等化写像**であるという．

位相群 G が位相空間 X に左(右)から作用しているとき，

$$x\sim x' \Longleftrightarrow gx=x' \quad (xg=x') \quad \text{となる } g\in G \text{ がある}$$

によって，X の点の同値関係 $\sim$ がえられる．このとき，商空間と射影を

$$X/G=X/\sim, \qquad \pi: X\longrightarrow X/G$$

で表わす．X/G の各点は $\sim$ による同値類で，その代表元 x について，

$$Gx=\{gx\,|\,g\in G\} \quad (xG=\{xg\,|\,g\in G\})$$

と表わされる．これを x の G による**軌道**という．

定理 1.6　G を位相群，H をその部分群とする．

(1)　H の G への右(左)からの作用(積)について，射影 $\pi: G\to G/H$ は連続な開写像(開集合の像は開集合)である．このとき，G/H は G の左(右)からの作用によって，G の等質空間である．

(2) Hが閉部分群$\Longrightarrow G/H$は正則空間(閉集合Fと1点$p\notin F$について, $p\in U$, $F\subset V$, $U\cap V=\phi$となる開集合U, VがあるT_1-空間), 従って, G/HはHausdorff空間(2点p, qに対して, $p\in U$, $q\in V$, $U\cap V=\phi$となる開集合U, Vがある). 特に, 位相群は正則空間である.

［証明］ (1) OをGの開集合とするとき, $h\in H$について, R_hは同相$\Longrightarrow R_h(O)$は開集合$\Longrightarrow \pi^{-1}(\pi(O))=\cup R_h(O)$は開集合$\Longrightarrow \pi(O)$は開集合. よって, πは開写像. πの連続性は明らか.

次に, GのG/Hへの作用は,

$$\varphi: G\times G/H\longrightarrow G/H$$

$$\Longleftrightarrow \varphi(g, g'H)=gg'H$$

$$\begin{array}{ccc} G\times G & \xrightarrow{\ \mu\ } & G \\ \downarrow{\scriptstyle 1\times\pi} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ G\times G/H & \xrightarrow{\ \varphi\ } & G/H \end{array}$$

で定義する. 上図の可換性から, G/Hの開集合Oについて, $(1\times\pi)^{-1}\varphi^{-1}(O)=\mu^{-1}\pi^{-1}(O)$は開集合. 開写像の積は開写像であることを使って, $\varphi^{-1}(O)=(1\times\pi)(1\times\pi)^{-1}\varphi^{-1}(O)$は開集合である. 従って, φは連続. φが左からの推移的な作用を与えていることは明らかであるから, G/HはGの等質空間である.

(2) Hは閉集合, L_gは同相$\Longrightarrow \pi^{-1}(\pi(g))=gH=L_g(H)$は閉集合$\Longrightarrow G/H$の各点$\pi(g)$は閉集合$\Longrightarrow G/H$は$T_1$-空間.

G/Hの閉集合Fと1点$p\notin F$について, $p\in U$, $F\subset V$, $U\cap V=\phi$となる開集合U, Vの存在を示せばよいが, GがG/Hに推移的に作用していることから, pは単位元eの類(H)であるとしてよい. F: 閉集合$\Longrightarrow F\cap U_0=\phi$, $p\in U_0$となる開集合U_0がある. Gの群作用の連続性$\Longrightarrow W^{-1}\cdot W=\{w_1{}^{-1}w_2 \mid w_1, w_2\in W\}\subset\pi^{-1}(U_0)$, $e\in W$, となる開集合Wが存在する. $W\cdot\pi^{-1}(F)=\cup Wg$ $(g\in\pi^{-1}(F))$は開集合. πは開写像であるから, $U=\pi(W)$および$V=\pi(W\cdot\pi^{-1}(F))$はともに開集合で, $p\in U$, $F\subset V$をみたす. いま, $y\in U\cap V$と仮定すると, $y=\pi(g_1)=\pi(g_2g)$となる$g_1, g_2\in W$および$g\in\pi^{-1}(F)$がある. このとき, $g_1h=g_2g$となる$h\in H$があるから, $gh^{-1}=g_2{}^{-1}g_1\in W^{-1}\cdot W\subset\pi^{-1}(U_0)$より$\pi(gh^{-1})\in F\cap U_0=\phi$という矛盾がでる. よって$U\cap V=\phi$である.

GはT_1-空間$\Longrightarrow \{e\}$は閉部分群$\Longrightarrow G=G/\{e\}$は正則空間. (終)

GのXへの作用が与えられているとき, Xの1点xについて,

$$G_x=\{g\in G \mid gx=x\} \quad (\text{または } G_x=\{g\in G \mid xg=x\})$$

は，G の($\{x\}$:閉集合$\Longrightarrow$閉) 部分群であり，x における**等方群**(x の**安定化群**) という．また，$x\in X$ に対して，写像 μ_x を次のように定義する：

$$\mu_x : G \longrightarrow X \Longleftrightarrow \mu_x(g)=gx \text{（または } xg\text{）}$$

明らかに，

(1.7)　(1)　G の作用が推移的$\Longleftrightarrow \mu_x$ は全射，

(2)　G の作用が効果的$\Longleftrightarrow \bigcap_{x\in X} G_x=\{e\}$．

定理 1.8　X は G の等質空間とする．

(1)　μ_x は $\mu_x=h_x\circ\pi_x$ をみたす連続な全単射 $h_x : G/G_x\to X$ を誘導する．ただし，$\pi_x : G\to G/G_x$ は射影．

$$\begin{array}{ccc} G/G_x & \xrightarrow{h_x} & X \\ \big\downarrow{\scriptstyle A_g} & & \big\downarrow{\scriptstyle L_g} \\ G/G_y & \xrightarrow{h_y} & X \end{array}$$

(2)　$g\in G$，$x\in X$，$y=g\cdot x$ について，右図は可換である．ただし，$G_y=gG_xg^{-1}$ であり，A_g は $A_g(g'G_x)=(gg'g^{-1})G_y$ で与えられる同相写像である．

(3)　μ_x(または h_x)が開写像であれば，h_x は同相写像である．

［証明］　(1)　$\pi_x(g_1)=\pi_x(g_2)\Longleftrightarrow g_1{}^{-1}g_2\in G_x\Longleftrightarrow g_1{}^{-1}g_2x=x\Longleftrightarrow \mu_x(g_1)=\mu_x(g_2)$．よって，$h_x(\pi_x(g))=\mu_x(g)$ は単射 h_x を定義し，(1.7) (1) によって，μ_x：全射$\Longrightarrow h_x$：全射．U：X の 開集合$\Longrightarrow \mu_x{}^{-1}(U)=\pi_x{}^{-1}(h_x{}^{-1}(U))$：開集合$\Longrightarrow h_x{}^{-1}(U)$：開集合．よって，$h_x$ は連続な全単射．

(2)　$g_1\in G$ について，$L_gh_x(\pi_x(g_1))=L_g\mu_x(g_1)=gg_1\cdot x=gg_1g^{-1}\cdot y=h_yA_g(\pi_y(g_1))\Longrightarrow$図式は可換．$G_y=A_gG_x=gG_xg^{-1}$ は明らか．

(3)　μ_x が開写像のとき，O：G/G_x の開集合$\Longrightarrow \pi_x{}^{-1}(O)$：開集合$\Longrightarrow h_x(O)=\mu_x(\pi_x{}^{-1}(O))$：開集合．よって，$h_x$ は開写像となる．このとき，h_x は同相写像である．　(終)

この定理を使って，次は容易に示される．

(1.9)　位相群の準同型 $f : G\to G'$ について，f の核 $\mathrm{Ker} f=f^{-1}(e)$ は G の閉正規部分群であり，f は商群 $G/\mathrm{Ker} f$ からの単射準同型 $\bar{f} : G/\mathrm{Ker} f\to G'$ を誘導する．さらに，f が全射かつ開写像であれば，$\bar{f}$ は位相群の同型である．

定理 1.8 における $\mu_x : G\to X$ が開写像であることを調べるには，次の補題が有用であろう．ここで，位相空間論における，コンパクト，局所コンパクト，

第2可算公理等の概念が必要である.

コンパクト(または**Lindelöf**)**集合**は，それが任意個の開集合で覆われているとき，そのうちの有限個(または可算個)ですでに覆われているという性質で特徴づけられる．その重要な例はユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^n$ の有界閉集合である．コンパクト集合の連続写像による像や，その閉部分集合はともにコンパクトである．Hausdorff 空間内のコンパクト集合は閉集合である．**局所コンパクト空間**は，各点がコンパクトな近傍をもつ空間である．

位相空間が**第2可算公理**をみたすとは，可算個の開基(任意の開集合はそれらの和集合でかける)をもつことであり，$\boldsymbol{R}^n$ やその部分空間はその主要な例である．

補題 1.10　Hausdorff 空間 X が位相群 G の等質空間であるとする．(α)　G がコンパクト，または，(β)　G と X は局所コンパクトかつ G は第2可算公理をみたす，とするならば，$\mu_x: G\to X$ は開写像，従って，$h_x: G/G_x\to X$ は同相写像である．

［証明］(α)　G がコンパクトのとき，定理1.6によって，G/G_x はコンパクトな Hausdorff 空間．このとき，連続な全単射 $h_x: G/G_x\to X$ は同相写像となる．定理1.6によって，$\pi: G\to G/G_x$：開写像 $\Longrightarrow \mu_x=h_x\circ\pi$：開写像.

(β) の条件がみたされているとする．O を G の開集合，$g\in O$ とするとき，$\mu_x(g)$ が $\mu_x(O)$ の内点であることをいえばよい．

e の近傍 V を，$g\cdot V=L_g(V)\subset O$ に選べる．G の正則性，局所コンパクト性および群作用の連続性より，e の近傍 U で，$\overline{U}$ はコンパクトかつ $\overline{U}^{-1}\cdot\overline{U}\subset V$ となるものがとれる．G：第2可算公理をみたす$\Longrightarrow$Lindelöf．よって，$G=\bigcup_{g\in G} gU$ に対して，可算列 $\{g_n\}$ があって $G=\bigcup_n g_nU$，従って

$$X=\mu_x(G)=\bigcup_n \mu_x(g_n\overline{U})$$

いま，ある n について，$\mu_x(g_n\overline{U})$ が内点 $\mu_x(g_nh)=(g_nh)x$，$h\in\overline{U}$，をもつと仮定すると，x は $(g_nh)^{-1}\mu_x(g_n\overline{U})=\mu_x(h^{-1}\overline{U})\subset\mu_x(\overline{U}^{-1}\overline{U})\subset\mu_x(V)$ の内点，従って，$\mu_x(g)=gx$ は $g\mu_x(V)=\mu_x(gV)\subset\mu_x(O)$ の内点となる．

以上のことから，各 n について，$\mu_x(g_n\overline{U})$ は内点をもたないと仮定して矛盾を出せばよいことがわかる．$\overline{U}$：コンパクト $\Longrightarrow \mu_x(g_n\overline{U})$：コンパクト $\Longrightarrow \mu_x(g_n\overline{U})$：閉集合．$W_0$ を $\overline{W}_0$ がコンパクトな，X の空でない開集合とし，n に関

する帰納法で，空でない開集合の列 W_0, W_1, …, W_n, … で $\overline{W}_n \subset W_{n-1} - \mu_x(g_n\overline{U})$ をみたすものを次のように作る．$\mu_x(g_n\overline{U})$ は内点をもたない閉集合であるから，$W_{n-1} - \mu_x(g_n\overline{U})$ は空でない開集合である．X は局所コンパクト正則空間であるから，空でない開集合 W_n で $\overline{W}_n \subset W_{n-1} - \mu_x(g_n\overline{U})$ をみたすものがとれる．このとき，$\overline{W}_0 \supset \overline{W}_1 \supset \overline{W}_2 \supset \cdots$ は空でないコンパクト集合の減少列であるから，$\cap \overline{W}_n \neq \phi$ である．一方 $\overline{W}_n \cap \mu_n(g_n\overline{U}) = \phi$ と $X = \cup \mu_x(g_n\overline{U})$ より $\cap \overline{W}_n = \phi$ となり，矛盾に導かれた．　(終)

位相群 $\boldsymbol{F}^* = \boldsymbol{F} - \{0\}$ は $\boldsymbol{F}^{n+1} - \{\boldsymbol{0}\}$ に左から，スカラー積 $x(x_0, x_1, \cdots, x_n) = (xx_0, xx_1, \cdots, xx_n)$ によって作用する．

定義　$P_n(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{F}^{n+1} - \{0\}/\boldsymbol{F}^*$ を **$\boldsymbol{F}$ 上の $\boldsymbol{n}$ 次元射影空間**という．

$P_n(\boldsymbol{F})$ の点は $\boldsymbol{x} = (x_0, x_1, \cdots, x_n) \neq 0$ を通る1次元部分空間とみなされ，

$$[x_0 : x_1 : \cdots : x_n] \in P_n(\boldsymbol{F})$$

で表わされる．一方，

$$S(\boldsymbol{F}^{n+1}) = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{F}^{n+1} \mid \|\boldsymbol{x}\| = 1\} \quad (\text{単位球面})$$

は，$\boldsymbol{F}^{n+1}$ の有界閉集合であるから，コンパクト Hausdorff 空間であり，また，ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^{d(n+1)}$ 内の単位球面 $S^{d(n+1)-1}$ と同相である．ここで，

$$d=1 \ (\boldsymbol{F}=\boldsymbol{R}),\ d=2 \ (\boldsymbol{F}=\boldsymbol{C}),\ d=4 \ (\boldsymbol{F}=\boldsymbol{H})$$

上の作用の制限として，$S(\boldsymbol{F}^1)$ は $S(\boldsymbol{F}^{n+1})$ に作用する．このとき，$S(\boldsymbol{F}^{n+1})/S(\boldsymbol{F}^1)$ はコンパクト Hausdorff 空間であり，補題1.10より次の同相がえられる：

(1.11)　$P_n(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{F}^{n+1} - \{\boldsymbol{0}\}/\boldsymbol{F}^* = S(\boldsymbol{F}^{n+1})/S(\boldsymbol{F}^1) = S^{d(n+1)-1}/S^{d-1}$　(同相)

連結位相群

連結な(2つの空でない開(かつ閉)部分集合に分かれない)位相空間の連続写像による像はまた連結である．位相空間は各**連結成分**(極大の連結部分空間)に分かれる．

定理 1.12　(1)　位相群 G の単位元の連結成分 G_0 は閉正規部分群で，G/G_0 の剰余類は各連結成分と一致する．

(2)　連結な位相群は単位元の近傍で生成される．

(3)　連結な位相群 G の正規部分群 H が疎な位相をもてば，$H \subset Z(G)$.

［証明］ (1) 対応 $g \to g^{-1}$ は連続で $e \to e \Longrightarrow G_0^{-1} \subset G_0$. $g_0 \in G_0$ について，$g \to g_0 g$ は連続で $e \to g_0 \in G_0 \Longrightarrow g_0 G_0 \subset G_0$. 故に，$G_0$ は部分群. 明らかに G_0 は閉集合. $g_1 \in G$ について，$g \to g_1 g g_1^{-1}$ は連続で $e \to e \Longrightarrow g_1 G_0 g_1^{-1} \subset G_0$. 故に G_0 は正規部分群. 後半は容易.

(2) Uを単位元を含む開集合とする．Uで生成される部分群を G_1 とする．$g \in G_1 \Longrightarrow g \cdot U \subset G_1$，$g \cdot U$ は g の近傍であるから，G_1 は開集合．逆に $g \in \overline{G}_1$ ならば，$g \cdot U \cap G_1 \neq \phi \Longrightarrow g \in G_1$．故に，$G_1$ は閉集合．G は連結 $\Longrightarrow G = G_1$.

(3) $h \in H$ に対して，$f(g) = ghg^{-1} \in H$ とおけば，$f: G \to H$ は連続で $f(e) = h$. G は連結，H は疎 $\Longrightarrow f(G) = \{h\} \Longrightarrow ghg^{-1} = h \Longrightarrow h \in Z(G)$ （終）

G を位相群，H をその部分群とするとき，射影 $\pi: G \to G/H$ の連続性から，G が連結 $\Longrightarrow G/H$ も連結．この逆を示すには若干の条件が必要である．

補題 1.13 G を位相群，H をその部分群とする．H および G/H が連結ならば G も連結である．

［証明］ $G = O_1 \cup O_2$，$O_1 \cap O_2 = \phi$ となる空でない開集合 O_1, O_2 があるとして矛盾を出せばよい．定理 1.6 により，π は開写像 $\Longrightarrow \pi(O_1)$, $\pi(O_2)$は開集合. $G/H = \pi(O_1) \cup \pi(O_2)$ は連結であるから，$gH \in \pi(O_1) \cap \pi(O_2)$ となる $g \in G$ がある． $H_i = g^{-1}(gH \cap O_i)$ $(i=1, 2)$ とおくと，H_i は空でない H の開集合で，$H_1 \cap H_2 = \phi$，$H = H_1 \cup H_2$．これは H の連結性に反する． （終）

定義 単位閉区間 $I = [0, 1]$ から位相空間 X への連続写像 $w: I \to X$ を X における1つの**道**といい，$w(0)$ を w の**始点**，$w(1)$ を w の**終点**という．また，w は $x_0 = w(0)$ と $x_1 = w(1)$を結ぶ**道**であるという．位相空間 X は，その任意の2点を結ぶ道が存在するとき，**弧状連結**であるという． 位相空間 X は，その各点の近傍内に弧状連結な近傍がとれるとき，**局所弧状連結**であるという．

本書で取り扱う位相群や等質空間は局所弧状連結である．連結成分に対応して，1点と道で結べる点の全体をその1点の**弧状成分**という．局所弧状連結空間の各弧状成分は開集合であることは定義から明らかである．よって，

(1.14) 局所弧状連結かつ連結な位相空間は弧状連結である．

§2 古典群

一般線型群

K を可換体とする．K 上のベクトル空間(線型空間，K- 加群) V からそれ自身への同型(全単射)な線型写像

$$f: V \cong V \quad (\text{線型}: f(v+v')=f(v)+f(v'),\ f(\alpha v)=\alpha f(v),\ \alpha \in K)$$

を(正則な)**線型変換**，V の線型変換の全体を V の上の**一般線型(変換)群**といい，

$$GL(V)=\mathrm{Aut}(V)=\{f: V\cong V\ (\text{線型})\}$$

のように表わす．もちろん，$GL(V)$ における積は線型写像の合成

$$gf=g\circ f: V \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} V$$

で与えられ，1_V が単位元である．

V を有限次元，$n=\dim_K V$ とする．K上の n 次正方行列全体を

$$M(n, K)=\{(a_{ij})_{i, j=1, \cdots, n} \mid a_{ij}\in K\}$$

で表わす．$M(n, K)$ は行列の和，積に関して(行列)環をなす．V の K- 基底 $B=\{\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_n\}$ を選び，対応 ψ_B を次のように定義する：

$$\psi_B: GL(V) \longrightarrow M(n, K) \Longleftrightarrow \psi_B(f)=(a_{ij}),\ f(\boldsymbol{b}_j)=\Sigma_i a_{ij}\boldsymbol{b}_i$$

よく知られているように，

(2.1) ψ_B は積を保つ単射で，その像は $M(n, K)$ の正則行列全体の作る群 $GL(n, K)$ と一致する．また，行列式 $\det: M(n, K)\to K$ を使えば，

$$\psi_B: GL(V)\cong GL(n, K)=\{A\in M(n, K) \mid \det A\neq 0\}$$

$GL(n, K)$ は K 上の **n 次の一般線型群**とよばれる．また，

$$SL(n, K)=\{A\in GL(n, K) \mid \det A=1\}$$

はその部分群をなし，**特殊線型群**とよばれる．

以下，$K=\boldsymbol{F}=\boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}$ の場合を考える．$M(n, \boldsymbol{F})$ は $A=(a_{ij})$ の座標 a_{ij} に関して距離が導入され，$\boldsymbol{F}^{n^2}(=\boldsymbol{R}^{n^2},\ \boldsymbol{C}^{n^2}\cong \boldsymbol{R}^{2n^2})$ と同相となる．行列における，和，積，スカラー積，行列式は座標 a_{ij} に関する多項式で表わされるから，連続関数である．また，逆行列は行列式を分母とする有理式で表わされる．以上のこ

とから，

(2.2) $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}$ のとき，$GL(n, \boldsymbol{F})$ は，$M(n, \boldsymbol{F})$ の開部分集合としての位相について，位相群であり，$SL(n, \boldsymbol{F})$ はその閉部分群である．$M(n, \boldsymbol{F})$，$GL(n, \boldsymbol{F})$，$SL(n, \boldsymbol{F})$ は局所コンパクトかつ第2可算公理をみたす距離空間である．

V を $\boldsymbol{R}$ 上のベクトル空間とするとき，$V\otimes_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{C}$ は $\boldsymbol{C}$ 上のベクトル空間となる．これらの上の一般線型群について，**複素化** $\boldsymbol{c}$ が

$$\boldsymbol{c}: GL(V) \longrightarrow GL(V\otimes_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{C}) \Longleftrightarrow \boldsymbol{c}(f)=f\otimes 1_{\boldsymbol{C}}$$

により定義され，$\boldsymbol{c}$ は位相群の単射な準同型である．特に，$V=\boldsymbol{R}^n$ ならば，$V\otimes_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}^n$ であるから，複素化は

$$\boldsymbol{c}: GL(n, \boldsymbol{R}) \longrightarrow GL(n, \boldsymbol{C})$$

となり，行列環における係数体 $\boldsymbol{R}$ の $\boldsymbol{C}$ への拡大

$$\boldsymbol{c}: M(n, \boldsymbol{R}) \longrightarrow M(n, \boldsymbol{C})$$

の $GL(n, \boldsymbol{R})$ 上への制限としてえられる．明らかに，

(2.3) $\boldsymbol{c}: M(n, \boldsymbol{R}) \longrightarrow M(n, \boldsymbol{C})$ は $\boldsymbol{R}$ 上の多元環の単射な準同型であり，

$\boldsymbol{c}(GL(n, \boldsymbol{R}))=GL(n, \boldsymbol{C})\cap \mathrm{Im}\, \boldsymbol{c}$

$A\in M(n, \boldsymbol{C})$ が $\mathrm{Im}\, \boldsymbol{c}$ に属する $\Longleftrightarrow A=\overline{A}$．

逆に，V を $\boldsymbol{C}$ 上のベクトル空間とするとき，それを $\boldsymbol{R}$ 上のベクトル空間とみなしたものを $V_{\boldsymbol{R}}$ とする．このとき，一般線型群の**実化**

$$\boldsymbol{r}: GL(V) \longrightarrow GL(V_{\boldsymbol{R}})$$

が自然に定義され，$\boldsymbol{r}$ は位相群の単射な準同型である．特に，$V=\boldsymbol{C}^n$ のときは，(1.3)′ により，$V_{\boldsymbol{R}}=\boldsymbol{R}^{2n}$ とみなすことによって，実化

$$\boldsymbol{r}: GL(n, \boldsymbol{C}) \longrightarrow GL(2n, \boldsymbol{R})$$

がえられ，これは以下に与えられる

$$\boldsymbol{r}: M(n, \boldsymbol{C}) \longrightarrow M(2n, \boldsymbol{R})$$

の制限である．$X\in M(n, \boldsymbol{C})$ を $X=A+\boldsymbol{i}B$ と $A, B\in M(n, \boldsymbol{R})$ で表わすとき

$$\boldsymbol{r}(X)=\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}\in M(2n, \boldsymbol{R})$$

実際，$X\in GL(n, \boldsymbol{C})$ の $\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{C}^n$ への作用は，$X\cdot\boldsymbol{v}={}^t(X\,{}^t\boldsymbol{v})$ で与えられ，$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{i}\boldsymbol{y}$ ($\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\in\boldsymbol{R}^n$) とするとき，

$$^t(X\cdot \boldsymbol{v})=(A+\boldsymbol{i}B)^t(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{i}\boldsymbol{y})=(A^t\boldsymbol{x}-B^t\boldsymbol{y})+\boldsymbol{i}(A^t\boldsymbol{y}+B^t\boldsymbol{x})$$

であるから，$\boldsymbol{r}(X)$は上のように与えられる．$\boldsymbol{r}$に関する次の性質は簡単な計算で示される ($X^*={}^t\overline{X}=\overline{{}^tX}$, I_nは単位行列，Oは零行列)：

(2.4) (1) $\boldsymbol{r}$は$\boldsymbol{r}(X^*)=\boldsymbol{r}(X)^*={}^t(\boldsymbol{r}(X))$ をみたす $\boldsymbol{R}$ 上の多元環の単射準同型，

(2) $Y\in \boldsymbol{r}(M(n, \boldsymbol{C}))\Longleftrightarrow J_nYJ_n^{-1}=Y\in M(2n, \boldsymbol{R})$, ただし $J_n=\begin{pmatrix} O & -I_n \\ I_n & O\end{pmatrix}$

(3) $X\in M(n, \boldsymbol{C}), \eta_n=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} I_n & \boldsymbol{i}I_n \\ \boldsymbol{i}I_n & I_n\end{pmatrix}\Longrightarrow \eta_n(\boldsymbol{c}\boldsymbol{r}(X))\eta_n^{-1}=\begin{pmatrix} X & O \\ O & \overline{X}\end{pmatrix}$

(4) $\boldsymbol{r}(GL(n, \boldsymbol{C}))=GL(2n, \boldsymbol{R})\cap \boldsymbol{r}(M(n, \boldsymbol{C}))$

位相群の表現

位相群Gが$\boldsymbol{F}(=\boldsymbol{R}, \boldsymbol{C})$上のベクトル空間$V$に$\mu: G\times V\to V$によって作用し，各$g\in G$について，$L_g: V\to V$が線型写像であるとき，$(V, \mu)$または単に$\mu$を，$V$の上の$G$の**表現**といい，$V$をこの表現の**表現空間**という．また，$G$の作用する$\boldsymbol{F}$-加群という意味で，$V$を$\boldsymbol{G}$-**加群**ともいう．

$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{R}$のときは，$(V, \mu)$を**実表現**，$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{C}$のときは**複素表現**という．

Gの表現(V, μ)に対して，対応φを

$$\varphi: G\longrightarrow GL(V)\Longleftrightarrow \varphi(g)(\boldsymbol{v})=L_g(\boldsymbol{v})=\mu(g, \boldsymbol{v})=g\cdot\boldsymbol{v}$$

によって定める．$\varphi(gg')=L_{gg'}=L_g\circ L_{g'}=\varphi(g)\varphi(g')$であるから，$\varphi$は群の準同型である．ここで，$GL(V)$は，(2.1)の$\psi_B$が同相となるように位相を入れて，位相群とする．（この位相が基底Bのとり方に無関係に定まることは下のようにしてわかる．）このとき，φの連続性は，$\psi_B(\varphi(g))=(a_{ij}(g))$, $g\boldsymbol{b}_j=\Sigma_i a_{ij}(g)\boldsymbol{b}_i$, における係数$a_{ij}(g)$の連続性と同値である．よって，

(2.5) GのV上の表現$\mu: G\times V\to V$と位相群の準同型$\varphi: G\to GL(V)$（または$\psi_B\circ\varphi: G\to GL(n, \boldsymbol{F})$)は，上の対応で1対1に対応する．(このことから，準同型φをもGの**表現**という．)

$f: V\to V$を$GL(V)$の元とするとき，表現$\mu: G\times V\to V$をこのfでおきかえてえられる $\mu': G\times V\to V\Longleftrightarrow \mu'(g, \boldsymbol{v})=f(\mu(g, f^{-1}(\boldsymbol{v})))$ は μと本質的に同じものと考えられるから，μとμ'は**同値**な表現であるという．μ, μ'がそれぞれ，準同型$\varphi, \varphi': G\to GL(V)$に対応しているとき，

表現μとμ'は同値$\Longleftrightarrow \varphi'(g)=f\varphi(g)f^{-1}$となる $f\in GL(V)$ がある．

特に，$\psi_B \circ \varphi$ において，基底 B を基底 B' でおきかえることは，$GL(n, \boldsymbol{F})$ の内部自己同型に対応しているから，$\psi_B \circ \varphi$ と $\psi_{B'} \circ \varphi$ は同値な $\boldsymbol{F}^n$ 上の表現である．これは同時に，$GL(V)$ の ψ_B による位相の入れ方が，基底 B のとり方によらないことを示している．

定義　位相群 G の表現 (V, μ) は V の部分ベクトル空間 W があって，$0 \neq W \neq V$ かつ $\mu(G \times W) \subset W$ をみたすとき**可約**である，そのような W がないときは**既約**であるという．上のような W を ***G*-不変部分空間**という．

G-不変部分空間 W について，μ を $G \times W$ に制限して1つの表現 $(W, \mu | W)$ がえられる．これを表現 (V, μ) の W への**制限**という．

G の表現 (V, μ) は，V が G-不変部分空間 W_i の直和であり，その各 W_i への制限 $(W_i, \mu | W_i)$ が既約であるとき，**完全可約**であるといわれる．

$$GL(V, W) = \{f \in GL(V) \mid f(W) \subset W\}$$

とおくとき，W を G-不変部分空間にもつ表現 (V, μ) に対応する準同型 φ は

$$\varphi : G \longrightarrow GL(V, W) \subset GL(V)$$

の形のものである．V の基底 $B = \{\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_n\}$ を $\{\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_r\}$ が W の基底となるように選べば，同型 $\psi_B : GL(V) \cong GL(n, \boldsymbol{F})$ によって，$GL(V, W)$ は

$$GL(n, r, \boldsymbol{F}) = \left\{ \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} \middle| A \in GL(r, \boldsymbol{F}),\ B \in GL(n-r, \boldsymbol{F}) \right\}$$

と同型である．ここで，さらに G-不変部分空間 W' があって，$V = W \oplus W'$（直和）ならば

$$GL(W) \times GL(W') = \{f \in GL(V) \mid f(W) \subset W,\ f(W') \subset W'\}$$

について，(表現) φ は次の形をしている：

$$\varphi : G \longrightarrow GL(W) \times GL(W') \subset GL(V)$$

このとき，

$$(V, \mu) = (W, \mu | W) \oplus (W', \mu | W') \quad (\text{直和})$$

で表わす．

(V, μ) が**完全可約**$\Longleftrightarrow$次のように表わすことができる：

$$(V, \mu) = \bigoplus_i (W_i, \mu | W_i) \ (\text{直和}) \ \text{かつ} \ (W_i, \mu | W_i) \ \text{は既約}.$$

基底 B を $\{\boldsymbol{b}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{b}_n\}$ が W' の基底となるようにとり直せば，$GL(W) \times GL(W')$ は ψ_B によって，

$$GL(r, \boldsymbol{F})\times GL(n-r, \boldsymbol{F})=\{A\oplus B=\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}\in GL(n, r, \boldsymbol{F})\}$$

と同型である.

一般に, $GL(n_i, \boldsymbol{F})$ の部分群 H_i $(i=1, 2)$ に対して, 部分群 $H_1\times H_2$ を

$$H_1\times H_2=\{A\oplus B\,|\,A\in H_1,\ B\in H_2\}\subset GL(n_1+n_2, \boldsymbol{F})$$

で定義する.

ユニタリー群と直交群

$\boldsymbol{C}$ 上のベクトル空間 V に次の条件 (2.6) をみたす内積 $(\ ,\ ): V\times V\to\boldsymbol{C}$ が与えられているとき, V を**複素計量ベクトル空間**という.

(2.6) (1) $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})\geq 0$, $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})=0\Longleftrightarrow\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$ (正定値)

(2) $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})=\overline{(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})}$, $(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}', \boldsymbol{v})=(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})+(\boldsymbol{u}', \boldsymbol{v})$

(3) $(\alpha\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})=\alpha(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ $(\alpha\in\boldsymbol{C})$

$\boldsymbol{R}$ 上のベクトル空間 V にも, 同じ条件をみたす内積 $(\ ,\ ): V\times V\to\boldsymbol{R}$ が与えられているとき, **実計量ベクトル空間**という. ただし, 条件(2)は $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})=(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})$, 条件(3)では $\alpha\in\boldsymbol{R}$ とする.

これらの V の部分集合 $\{\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_r\}$ は

$$(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)=\delta_{ij}\ \ (=1(i=j),\ \ =0(i\neq j))$$

をみたすとき, **正規直交系**であるという. 簡単な計算によって, 正規直交系は独立であることがわかる. これが V を張れば1つの基底となり, **正規直交基底**とよばれる. 正規直交系 $\{\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_r\}$ の直交補空間 $\{\boldsymbol{v}\in V\,|\,(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}_i)=0\}$ が自明でなければ, その中から長さ $\|\boldsymbol{e}_{r+1}\|=\sqrt{(\boldsymbol{e}_{r+1}, \boldsymbol{e}_{r+1})}=1$ のベクトルをとって, $\{\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_{r+1}\}$ は正規直交系となる. このことから, V が有限次元であれば正規直交基底が存在することがわかる.

特に, $\boldsymbol{C}^n$ (または $\boldsymbol{R}^n$) においては, $\boldsymbol{u}=(u_1, \cdots, u_n)$, $\boldsymbol{v}=(v_1, \cdots, v_n)\in\boldsymbol{C}^n$ (または $\boldsymbol{R}^n$) に対して, 特別な内積が

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})=\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}^*=\textstyle\sum_{i=1}^n u_i\bar{v}_i \quad (\text{または } \textstyle\sum_{i=1}^n u_iv_i)$$

によって与えられるものとする. このとき, ベクトルの長さは $\|\boldsymbol{u}\|=\sqrt{(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})}$ で与えられている.

複素(または実)計量ベクトル空間 V において, 内積を保つ線型変換

$$f : V \cong V \text{ (線型)}, \quad (f(\boldsymbol{u}), f(\boldsymbol{v})) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$$

を**ユニタリー**(または**直交**)**変換**，それら全体のなす $GL(V)$ の部分群を V の**ユニタリー**(または**直交**)**変換群**といい

$$U(V) \subset GL(V)$$

で表わす．特に，$V=\boldsymbol{C}^n$（または $\boldsymbol{R}^n$）の場合には，上の特別な内積について，

$U(n)=U(n, \boldsymbol{C})=U(\boldsymbol{C}^n)$ を **n 次ユニタリー群**,

$O(n)=U(n, \boldsymbol{R})=U(\boldsymbol{R}^n)$ を **n 次直交群**

という．これらを行列で表示すれば，

$$U(n, \boldsymbol{F}) = \{A \in M(n, \boldsymbol{F}) \mid AA^* = I_n\} \qquad (\boldsymbol{F}=\boldsymbol{R}, \boldsymbol{C})$$

と書ける．即ち，$U(n)=U(n, \boldsymbol{C})$ は n 次のユニタリー行列の全体，$O(n)=U(n, \boldsymbol{R})$ は n 次の直交行列 $(A : A^tA=I_n)$ の全体の作る群で，$U(n, \boldsymbol{F})$ は $GL(n, \boldsymbol{F})$ の閉部分群である．$A \in U(n, \boldsymbol{F}) \Longleftrightarrow A^{-1}=A^* \Longleftrightarrow A^*A=I_n \Longleftrightarrow AA^*=I_n$ に注意する．

$$SU(n, \boldsymbol{F}) = U(n, \boldsymbol{F}) \cap SL(n, \boldsymbol{F}) \qquad (\boldsymbol{F}=\boldsymbol{R}, \boldsymbol{C})$$

とおく．特に，

$SU(n)=SU(n, \boldsymbol{C})$ を **n 次特殊ユニタリー群**,

$SO(n)=SU(n, \boldsymbol{R})$ を **n 次特殊直交群**または **n 次回転群**

という．

(2.3), (2.4) を直交群，ユニタリー群に制限して考えれば次のようになる．

(2.7) (1) $\boldsymbol{c} : O(n) \to U(n)$, $\boldsymbol{c} : SO(n) \to SU(n)$ は位相群の単射準同型であり，

$$A \in U(n) \text{ (または } SU(n)) \text{ が } \mathrm{Im}\, \boldsymbol{c} \text{ に属する} \Longleftrightarrow A = \overline{A}$$

(2) $\boldsymbol{r} : U(n) \longrightarrow SO(2n)$ は単射準同型で，

$$A \in \mathrm{Im}\, \boldsymbol{r} \Longleftrightarrow J_nAJ_n^{-1}=A, \text{ ただし } J_n = \begin{pmatrix} O & -I_n \\ I_n & O \end{pmatrix}$$

(3) $A \in U(n)$, $\eta_n = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} I_n & \boldsymbol{i}I_n \\ \boldsymbol{i}I_n & I_n \end{pmatrix} \Longrightarrow \eta_n(\boldsymbol{cr}(A))\eta_n^{-1} = A \oplus \overline{A}$

定理 2.8 位相群 $U(n)$, $O(n)$, $SU(n)$, $SO(n)$ はコンパクトである．

［証明］ これらは，$M(n, \boldsymbol{C}) \cong \boldsymbol{R}^{2n^2}$ または $M(n, \boldsymbol{R}) \cong \boldsymbol{R}^{n^2}$ の閉部分集合であるから，有界であることをいえばよい．$A=(a_{ij}) \in U(n)$ について，$AA^*=I_n$ より，$|a_{ij}|^2 = a_{ij}\overline{a}_{ij} \leqq \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\overline{a}_{ik} = 1$．よって，$U(n)$ は有界である．他も同様．（終）

複素(または実)計量ベクトル空間 V を表現空間とする，位相群 G の表現 $\mu: G\times V\to V$ が内積を保つ，即ち

$$(g\cdot\boldsymbol{u},\ g\cdot\boldsymbol{v})=(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v}) \qquad (g\in G;\ \boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in V)$$

がつねに成り立つとき，これを**ユニタリー表現**(または**直交表現**)という．このとき，μ に対応する準同型 $\varphi: G\to GL(V)$ は $U(V)$ に値をもつ．(2.6)と同様に次が成り立つ．

(2.9) G の V 上のユニタリー(または直交)表現と，位相群の準同型 $\varphi: G\to U(V)$ とは1対1対応にある(この φ も**ユニタリー**(または**直交**)**表現**という)．

ユニタリー(または直交)表現の**同値**は，V の内積を保つ自己同型で与えられ，対応する準同型 $\varphi, \varphi': G\to U(V)$ について表わせば，

$$\varphi \text{ と } \varphi' (\mu \text{ と } \mu') \text{ は同値} \Longleftrightarrow \varphi'=f\varphi f^{-1} \text{ となる } f\in U(V) \text{ がある．}$$

恒等対応 $U(n,\ \boldsymbol{F})\to U(n,\ \boldsymbol{F})=U(\boldsymbol{F}^n)$ に対応する表現(作用)

$$\mu:\ U(n,\ \boldsymbol{F})\times \boldsymbol{F}^n \longrightarrow \boldsymbol{F}^n \qquad (\boldsymbol{F}=\boldsymbol{R},\ \boldsymbol{C})$$

は $\mu(A,\ \boldsymbol{v})={}^t(A{}^t\boldsymbol{v})=\boldsymbol{v}{}^tA$ で与えられる．この作用は内積，従って，長さを変えないから，単位球面 $S(\boldsymbol{F}^n)$ に作用する．

定理 2.10 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{R},\ \boldsymbol{C}$ とする．$S(\boldsymbol{F}^n)$ は $U(n,\ \boldsymbol{F})$ の等質空間であり，$\boldsymbol{e}_1=(1,\ 0,\cdots,\ 0)$ における等方群は $1\times U(n-1,\ \boldsymbol{F})=\left\{\begin{pmatrix}1 & O\\ O & A\end{pmatrix}\middle|\ A\in U(n-1,\ \boldsymbol{F})\right\}$：

$$U(n,\ \boldsymbol{F})/1\times U(n-1,\ \boldsymbol{F})=S(\boldsymbol{F}^n)\cong S^{dn-1}\text{(同相)}$$

$n>1$ ならば，U を SU におきかえて同じことが成り立つ．

［証明］ $\pi:\ U(n,\ \boldsymbol{F})\to S(\boldsymbol{F}^n) \Longleftrightarrow \pi(A)={}^t(A{}^t\boldsymbol{e}_1)$ が全射で，$\pi^{-1}(\boldsymbol{e}_1)=1\times U(n-1,\ \boldsymbol{F})$ であることを示せばよい．$\boldsymbol{v}_1\in S(\boldsymbol{F}^n)$ は $\|\boldsymbol{v}_1\|=1$ であるから，$\{\boldsymbol{v}_1\}$ は正規直交系をなす．前に示したように，正規直交基底 $\{\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{v}_n\}$ が作られる．$A=({}^t\boldsymbol{v}_1,\ {}^t\boldsymbol{v}_2,\ \cdots,\ {}^t\boldsymbol{v}_n)$ とおけば $A^*A=I_n$ および $A{}^t\boldsymbol{e}_1={}^t\boldsymbol{v}_1$ をみたすから，π は全射である．逆に，$A\in U(n,\ \boldsymbol{F})$ を $A=({}^t\boldsymbol{v}_1,\ {}^t\boldsymbol{v}_2,\ \cdots,\ {}^t\boldsymbol{v}_n)$ と表わすとき，$\{\boldsymbol{v}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{v}_n\}$ は正規直交基底をなす．ここで，$\pi(A)={}^t\boldsymbol{e}_1$ ならば $\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{e}_1$ である．$\boldsymbol{v}_i=(a_{i1},\ \cdots,\ a_{in})$，$i>1$，とするとき，$a_{i1}=(\boldsymbol{v}_i,\ \boldsymbol{e}_1)=0$．よって，$A\in 1\times U(n-1,\ \boldsymbol{F})$．$\pi(1\times U(n-1,\ \boldsymbol{F}))={}^t\boldsymbol{e}_1$ は明らかであるから，$\pi^{-1}(\boldsymbol{e}_1)=1\times U(n-1,\ \boldsymbol{F})$．$n>1$ のときは，$\boldsymbol{v}_n$ をとりかえて $\det A=1$ にできる． (終)

計量ベクトル空間 V の部分ベクトル空間 W は，もとの内積によって計量ベ

クトル空間であり，W の V における**直交補空間** $W^\perp$ は

$$W^\perp=\{\boldsymbol{v}\in V \mid (\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{w})=0 \quad (\forall \boldsymbol{w}\in W)\}$$

で定義される．

定理 2.11 $(V,\ \mu)$ は位相群 G のユニタリー(または直交)表現とする．

(1) W が G-不変ならば $W^\perp$ も G-不変で，$(V,\ \mu)=(W,\ \mu|W)\oplus(W^\perp,\ \mu|W^\perp)$．

(2) V が有限次元ならば，$(V,\ \mu)$ は完全可約である．

［証明］ $g\in G$，$\boldsymbol{u}\in W^\perp$ とするとき，任意の $\boldsymbol{w}\in W$ について，$g^{-1}\cdot\boldsymbol{w}\in W$ であるから，$(g\cdot\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{w})=(g^{-1}g\cdot\boldsymbol{u},\ \ g^{-1}\cdot\boldsymbol{w})=(\boldsymbol{u},\ g^{-1}\cdot\boldsymbol{w})=0$．よって，$g\cdot\boldsymbol{u}\in W^\perp$，即ち，$W^\perp$ は G-不変で(1)がえられる．(2)は(1)を繰り返し使えばえられる． (終)

なお，

$$O(n,\ \boldsymbol{F})=\{A\in M(n,\boldsymbol{F}) \mid A^tA=I_n\} \quad (\boldsymbol{F}=\boldsymbol{R},\ \boldsymbol{C})$$

は $GL(n,\ \boldsymbol{F})$ の閉部分群で，$O(n,\ \boldsymbol{R})=O(n)=U(n,\ \boldsymbol{R})$ である．$O(n,\ \boldsymbol{C})$ は**複素直交群**とよばれている．

Symplectic 群

今迄は $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{R},\ \boldsymbol{C}$ の場合を考えてきたが，$\boldsymbol{F}$ が四元数体 $\boldsymbol{H}$ の場合も類似の議論ができる．ただし，$\boldsymbol{H}$ は可換体ではないから，$\boldsymbol{H}$ の上の n 次正方行列 $A\in M(n,\ \boldsymbol{H})$ に対する写像

(＊) $f:\boldsymbol{H}^n\longrightarrow\boldsymbol{H}^n \Longleftrightarrow {}^t(f(\boldsymbol{v}))=A^t\boldsymbol{v},\ \ \boldsymbol{v}\in\boldsymbol{H}^n$

は，$\boldsymbol{H}$ の右からの作用について線型，即ち $\boldsymbol{H}$-右加群の準同型である．従って，$\boldsymbol{H}$-右加群 V に対して

$$GL(V)=\{f:\ V\longrightarrow V \mid f \text{ は } \boldsymbol{H}\text{-右加群の同型}\}$$

と定義して，V の**一般線型群**という．V の $\boldsymbol{H}$-右加群としての基底 $B=\{\boldsymbol{b}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{b}_n\}$ について，$\psi_B(f)=(x_{ij})$，$f(\boldsymbol{b}_j)=\sum_i \boldsymbol{b}_i x_{ij}$ とおくことによって，

(2.12) $\psi_B: GL(V)\longrightarrow M(n,\ \boldsymbol{H})$ は積を保つ単射で，その像は

$$GL(n,\ \boldsymbol{H})=\{X\in M(n,\boldsymbol{H}) \mid X \text{ は正則 } (XX^{-1}=I_n \text{ となる } X^{-1} \text{ がある})\}$$

この $GL(n,\ \boldsymbol{H})$ を $\boldsymbol{H}$ の上の **n 次一般線型群**という．

また，$x,\ y\in\boldsymbol{H}$ について，$\overline{xy}=\bar{y}\bar{x}$ が成り立つことから，

$$A,\ B \in M(n,\ \boldsymbol{H}) \Longrightarrow (AB)^* = B^*A^*$$

が成り立つことがわかり,

$$Sp(n) = U(n,\ \boldsymbol{H}) = \{A \in M(n,\ \boldsymbol{H}) \mid AA^* = I_n\}$$

は $GL(n, \boldsymbol{H})$ の部分群であることがわかる. これを $\boldsymbol{n}$ 次 **symplectic 群**という. $M(n,\ \boldsymbol{H})$ にその座標によって, $\boldsymbol{H}^{n^2} \cong \boldsymbol{R}^{4n^2}$ の位相を入れ, $GL(n,\ \boldsymbol{H})$ および $Sp(n)$ をその部分空間とみれば, これらは位相群となる.

symplectic 群 $Sp(n)$ は通例 $U(2n) = U(2n,\ \boldsymbol{C})$ の部分群として定義される. これを明らかにするために, $\boldsymbol{H}^n$ を $\boldsymbol{C}$-右加群と考えて, 同型 $\boldsymbol{c}'$ を

$$\boldsymbol{c}' : \boldsymbol{H}^n \longrightarrow \boldsymbol{C}^{2n} \Longleftrightarrow \boldsymbol{c}'(a_1 + \boldsymbol{j}b_1,\ \cdots,\ a_n + \boldsymbol{j}b_n) = (a_1,\ \cdots,\ a_n, b_1,\ \cdots,\ b_n)$$

で定義する. そのとき, (*) によって, $X \in M(n,\ \boldsymbol{H})$ に $f : \boldsymbol{H}^n \to \boldsymbol{H}^n$ が対応するとき, $\boldsymbol{c}'f\boldsymbol{c}'^{-1} : \boldsymbol{C}^{2n} \to \boldsymbol{C}^{2n}$ に対応する $M(2n,\ \boldsymbol{C})$ の行列を $\boldsymbol{c}'(X)$ として,

$$\boldsymbol{c}' : M(n,\ \boldsymbol{H}) \longrightarrow M(2n,\ \boldsymbol{C})$$

を考える. $\boldsymbol{c}'$ は次の (2.13) によって与えられる. $X \in M(n,\ \boldsymbol{H})$ を $X = A + \boldsymbol{j}B$ と $A,\ B \in M(n, \boldsymbol{C})$ で表わすとき, $\boldsymbol{j}B = \overline{B}\boldsymbol{j}$ が成り立つから, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{j}\boldsymbol{y}\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{C}^n)$ に対して,

$$X^t\boldsymbol{v} = (A + \boldsymbol{j}B)^t(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{j}\boldsymbol{y}) = (A^t\boldsymbol{x} - \overline{B}^t\boldsymbol{y}) + \boldsymbol{j}(\overline{A}^t\boldsymbol{y} + B^t\boldsymbol{x})$$

よって,

(2.13) $\quad \boldsymbol{c}'(X) = \begin{pmatrix} A & -\overline{B} \\ B & \overline{A} \end{pmatrix} \in M(2n,\ \boldsymbol{C}) \qquad (X = A + \boldsymbol{j}B)$

$\boldsymbol{c}'$ に関する次の性質は簡単な計算で示される:

(2.14) (1) $\boldsymbol{c}'$ は $\boldsymbol{c}'(X^*) = \boldsymbol{c}'(X)^*$ をみたす $\boldsymbol{R}$ 上の多元環の単射準同型,

(2) $Y \in \boldsymbol{c}'(M(n,\ \boldsymbol{H})) \Longleftrightarrow J_nYJ_n{}^{-1} = \overline{Y} \in M(2n,\ \boldsymbol{C})$, ただし $J_n = \begin{pmatrix} O & -I_n \\ I_n & O \end{pmatrix}$

(3) $X \in M(n,\ \boldsymbol{H}),\quad \eta_n = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} I_n & \boldsymbol{j}I_n \\ \boldsymbol{i}I_n & -\boldsymbol{k}I_n \end{pmatrix} \Longrightarrow \eta_n(\boldsymbol{q}\boldsymbol{c}'(X))\eta_n{}^{-1} = \begin{pmatrix} X & O \\ O & X \end{pmatrix}$

(4) $\boldsymbol{c}'(GL(n,\ \boldsymbol{H})) = GL(2n,\ \boldsymbol{C}) \cap \boldsymbol{c}'(M(n,\ \boldsymbol{H}))$

ここで, 射入

$$\boldsymbol{q} : M(m,\ \boldsymbol{C}) \longrightarrow M(m,\ \boldsymbol{H})$$

は, 係数体 $\boldsymbol{C}$ を $\boldsymbol{H}$ に拡大してえられる環の準同型で $\boldsymbol{q}(X^*) = \boldsymbol{q}(X)^*$ をみたす.

次に, $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{R},\ \boldsymbol{C}$ として

$$Sp(n,\ \boldsymbol{F})=\{A\in M(2n,\ \boldsymbol{F})\,|\,{}^tAJ_nA=J_n\}$$

を考えると，これは $GL(2n,\ \boldsymbol{F})$ の閉部分群をなすことがわかる．特に

$Sp(n,\ \boldsymbol{R})$ を**実 symplectic 群**，

$Sp(n,\ \boldsymbol{C})$ を**複素 symplectic 群**

という．このとき，

(2.15)　$\boldsymbol{c}' : Sp(n)\cong Sp(n,\ \boldsymbol{C})\cap U(2n)$　(同型)

実際，$\boldsymbol{c}'$ は単射であるから，$X\in Sp(n)\Longleftrightarrow XX^*=I_n\Longleftrightarrow \boldsymbol{c}'(X)\boldsymbol{c}'(X)^*=\boldsymbol{c}'(XX^*)=I_{2n}\Longleftrightarrow \boldsymbol{c}'(X)\in U(2n)$．また，$A\in U(2n)$ について，${}^tAJ_nA=J_n\Longleftrightarrow J_nAJ_n^{-1}=({}^tA)^{-1}=({}^tA)^*=\overline{A}$．よって，(2.15)をうる．

(2.16)　$Sp(n,\ \boldsymbol{F})(\subset GL(2n,\ \boldsymbol{F}))$に対応する $GL(\boldsymbol{F}^{2n})$ の部分群は同型 $f : \boldsymbol{F}^{2n}\to\boldsymbol{F}^{2n}$ で，$f(x_1,\ \cdots,\ x_{2n})=(x'_1,\ \cdots,\ x'_{2n})$，$f(y_1,\ \cdots,\ y_{2n})=(y'_1,\ \cdots,\ y'_{2n})$ に対して $\sum_{i=1}^n(x_iy_{n+i}-x_{n+i}y_i)=\sum_{i=1}^n(x'_iy'_{n+i}-x'_{n+i}y'_i)$ となるもの全体からなる．

$\boldsymbol{C}^n$，$\boldsymbol{R}^n$ における内積は $(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v})=\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}^*=\overline{\boldsymbol{v}}\cdot{}^t\boldsymbol{u}$ で定義された．$\boldsymbol{H}^n$ では

$$(\ ,\ ) : \boldsymbol{H}^n\times\boldsymbol{H}^n\longrightarrow\boldsymbol{H}\Longleftrightarrow(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v})=\overline{\boldsymbol{v}}\cdot{}^t\boldsymbol{u}$$

で内積を定義する．このとき，容易に

(2.17)　(1)　$(\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{v})=\|\boldsymbol{v}\|^2\geq 0$，$(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})=0\Longleftrightarrow\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$

(2)　$(\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{u})=\overline{(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v})}$，$(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}',\ \boldsymbol{v})=(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v})+(\boldsymbol{u}',\ \boldsymbol{v})$

(3)　$(\boldsymbol{u}\alpha,\ \boldsymbol{v})=(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v})\alpha$，$(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v}\alpha)=\bar{\alpha}(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v})$，$(\alpha\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v})=(\boldsymbol{u},\bar{\alpha}\boldsymbol{v})$　$(\alpha\in\boldsymbol{H})$

この内積に関して，$\boldsymbol{H}^n$ の正規直交系$\{\boldsymbol{e}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{e}_r\}$が与えられたとき，それを含む正規直交基底 $\{\boldsymbol{e}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{e}_n\}$ が作られる．従って，定理 2.8，定理 2.10 の証明は $Sp(n)=U(n,\ \boldsymbol{H})$ にも適用できる．よって

定理 2.18　$Sp(n)$ はコンパクトで，$S(\boldsymbol{H}^n)$ に効果的に作用し

$$Sp(n)/1\times Sp(n-1)\cong S(\boldsymbol{H}^n)\cong S^{4n-1}\quad(\text{同相})$$

以上，この§で定義された位相群 $GL(n,\ \boldsymbol{F})$，$U(n,\ \boldsymbol{F})$ $(\boldsymbol{F}=\boldsymbol{R},\ \boldsymbol{C},\ \boldsymbol{H})$ および $SL(n,\ \boldsymbol{F})$，$SU(n,\ \boldsymbol{F})$，$O(n,\ \boldsymbol{F})$，$Sp(n,\ \boldsymbol{F})$ $(\boldsymbol{F}=\boldsymbol{R},\ \boldsymbol{C})$ は総括的に**古典群**とよばれているものの一部である．本書で古典群といえばこれらの中のどれかを指すものとする．

§3　正規行列の対角化

対角行列と正規行列

この§では，$\boldsymbol{F}$ は $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{H}$ のどれかとする．

記号　$D(n, \boldsymbol{F})=\{A=(a_{ij})\in M(n, \boldsymbol{F})\,|\,a_{ij}=0(i\neq j)\}$ ：**対角行列**全体

定義　$A\in M(n, \boldsymbol{F})$ が**正規**$\Longleftrightarrow AA^*=A^*A$

$U(n, \boldsymbol{F})=\{A\in M(n, \boldsymbol{F})\,|\,AA^*=A^*A=I_n\}$ と表わせるから，

(3.1)　$D(n, \boldsymbol{F})$, $U(n, \boldsymbol{F})$ の元(行列)は正規である．

A, $B\in M(n, \boldsymbol{F})$ に対して，つねに $(AB)^*=B^*A^*$ が成り立つから，$U\in U(n, \boldsymbol{F})$ で A を変形した $UAU^{-1}=UAU^*$ について，$(UAU^{-1})^*=UA^*U^{-1}$ が成り立つ．このことから容易に

(3.2)　$A\in M(n, \boldsymbol{F})$ が正規，$U\in U(n, \boldsymbol{F})\Longrightarrow UAU^{-1}$ は正規，

　　特に，$D\in D(n, \boldsymbol{F})$, $U\in U(n, \boldsymbol{F})\Longrightarrow UDU^{-1}$ は正規．

逆に，正規行列 $A\in M(n, \boldsymbol{F})$ が $U\in U(n, \boldsymbol{F})$ によって，$U^{-1}AU\in D(n, \boldsymbol{F})$ となるとき，A は**対角化可能**という．以下 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{H}$ のそれぞれの場合に，正規行列が対角化可能かどうかを調べよう．

対角行列 $D\in D(n, \boldsymbol{F})$ を $D=\lambda_1\oplus\cdots\oplus\lambda_n=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & O\\ & \ddots & \\ O & & \lambda_n\end{pmatrix}$ と表わしたとき，$\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$ を D の**対角成分**という．

$\boldsymbol{C}$ 上の正規行列の対角化

定義　$A\in M(n, \boldsymbol{C})$ に対して，n 次方程式 $\det(xI_n-A)=0$ の根 $\lambda\in\boldsymbol{C}$ を A の**固有値**という．固有値の集合 $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$ は重根も重複して数えることとする．A の固有値 λ に対して，$\boldsymbol{C}^n$ の部分空間

$$V_\lambda=\{\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{C}^n\,|\,A{}^t\boldsymbol{v}=\lambda{}^t\boldsymbol{v}\}$$

を λ の**固有空間**，V_λ の $\boldsymbol{0}$ でないベクトルを λ に関する A の**固有ベクトル**という．

λ は $\det(xI_n-A)=0$ の根であるから，$(\lambda I_n-A){}^t\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$ をみたす(固有)ベクトル $\boldsymbol{v}\neq\boldsymbol{0}$ が存在し，$V_\lambda\neq 0$ である．

定理 3.3 $A\in M(n, \boldsymbol{C})$ が正規であれば，$U^{-1}AU\in D(n, \boldsymbol{C})$ となる $U\in U(n)=U(n, \boldsymbol{C})$ が存在する．このとき，$U^{-1}AU$ の対角成分は A の固有値の集合と一致する．さらに，A の固有値の順序づけられた集合 $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$ に対して，$U^{-1}AU=\lambda_1\oplus\cdots\oplus\lambda_n$ となるように U を選べる．

［証明］ λ を A の固有値とし，固有空間 $V_\lambda\neq 0$ を考える． $V_\lambda=\boldsymbol{C}^n$ ならば $A=\lambda I_n$ であり，定理は自明である．$\dim_{\boldsymbol{C}} V_\lambda=r<n$ とし，V_λ の直交補空間 $V_\lambda{}^\perp$ を考える．A に対応する線型変換 $f:\boldsymbol{C}^n\to\boldsymbol{C}^n$ は $f(\boldsymbol{v})={}^t(A^t\boldsymbol{v})=\boldsymbol{v}^tA$ で与えられる．$\boldsymbol{v}\in V_\lambda\Longleftrightarrow f(\boldsymbol{v})=\lambda\boldsymbol{v}\in V_\lambda$ であるから，このとき

$$f(\boldsymbol{v}\overline{A})=\boldsymbol{v}\overline{A}{}^tA=\boldsymbol{v}^t(AA^*)=\boldsymbol{v}^t(A^*A)=\boldsymbol{v}^tA\overline{A}=f(\boldsymbol{v})\overline{A}=\lambda(\boldsymbol{v}\overline{A})$$

よって，$\boldsymbol{v}\in V_\lambda\Longrightarrow\boldsymbol{v}\overline{A}\in V_\lambda$．さらに，$\boldsymbol{w}\in V_\lambda{}^\perp$ を考えると，

$$(f(\boldsymbol{w}),\ \boldsymbol{v})=f(\boldsymbol{w})\boldsymbol{v}^*=\boldsymbol{w}^tA\boldsymbol{v}^*=\boldsymbol{w}(\boldsymbol{v}\overline{A})^*=(\boldsymbol{w},\ \boldsymbol{v}\overline{A})=0$$

即ち， $\boldsymbol{w}\in V_\lambda{}^\perp\Longrightarrow f(\boldsymbol{w})\in V_\lambda{}^\perp$

ここで，$\boldsymbol{C}^n$ の正規直交基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ を $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_r\}$ が V_λ の正規直交基底となるように選ぶと，$\{\boldsymbol{u}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ は $V_\lambda{}^\perp$ の正規直交基底となり，$A^t\boldsymbol{u}_i=\lambda^t\boldsymbol{u}$ $(1\leq i\leq r)$，$A^t\boldsymbol{u}_j=\sum_{k=r+1}^n b_{jk}{}^t\boldsymbol{u}_k$ $(r<j\leq n)$ となる $B=(b_{jk})\in M(n-r, \boldsymbol{C})$ がある．よって，$U_0=({}^t\boldsymbol{u}_1, \cdots, {}^t\boldsymbol{u}_n)\in U(n)$ とおけば，

$$AU_0=U_0(\lambda I_r\oplus B)$$

容易に，

$$A:\text{正規}\Longrightarrow U_0{}^{-1}AU_0=\lambda I_r\oplus B:\text{正規}\Longrightarrow B:\text{正規}$$

定理は $n=1$ のとき自明であるから，n に関する帰納法によって，B は $U_1\in U(n-r)$ によって対角化されるとしてよい．このとき，A は $U=U_0(I_r\oplus U_1)$ によって対角化される．

$\det(xI_n-U^{-1}AU)=\det(xI_n-A)$ であるから，A の固有値は $U^{-1}AU$ の固有値と一致し，その集合は対角行列 $U^{-1}AU$ の対角成分と一致する．

n 文字 $\{1, \cdots, n\}$ の置換 τ について，置換行列 $P_\tau=(\delta_{i\tau(j)})$ を考えると，

$$P_\tau{}^{-1}(\lambda_1\oplus\cdots\oplus\lambda_n)P_\tau=\lambda_{\tau(1)}\oplus\cdots\oplus\lambda_{\tau(n)}$$

である．$P_\tau\in U(n)$ であるから，与えられた順序に対角成分が並ぶように対角化することができる． （終）

系 3.4 相異なる固有値 $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_s\}$ について，$\boldsymbol{C}^n$ は互いに直交する V_{λ_i} の直和．

$\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{H}$ 上の正規行列

$M(n, \boldsymbol{R})$ の行列 A の**固有値** $\lambda \in \boldsymbol{C}$ は，A を射入（複素化）$\boldsymbol{c}: M(n, \boldsymbol{R}) \to M(n, \boldsymbol{C})$ によって $\boldsymbol{C}$ 上の行列と考えたときの固有値とする．λ が $A \in M(n, \boldsymbol{R})$ の固有値であれば，その共役 $\bar{\lambda}$ も A の固有値である．(2.4) (1)により，

$$X \in M(n, \boldsymbol{C}) : \text{正規} \Longrightarrow \boldsymbol{r}(X) \in M(2n, \boldsymbol{R}) : \text{正規}$$

特に，$\boldsymbol{r}(a+b\boldsymbol{i}) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in M(2, \boldsymbol{R})$ は正規であり，$b \neq 0$ ならば，これは$O(2)$の元で対角化できない．

定理 3.5 $A \in M(n, \boldsymbol{R})$ が正規であれば，$T^{-1}AT = \lambda_1 \oplus \cdots \oplus \lambda_{n-2m} \oplus \boldsymbol{r}(\alpha_1) \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{r}(\alpha_m)$ ($\lambda_i \in \boldsymbol{R}$, $\alpha_j \in \boldsymbol{C}$) となる $T \in O(n) = U(n, \boldsymbol{R})$ がある．ここで，A の固有値全体$=\{\lambda_i, \alpha_j, \bar{\alpha}_j\}$であり，$\boldsymbol{r}(\alpha_j)$, $\boldsymbol{r}(\bar{\alpha}_j)$ の一方と λ_i の任意の順序の直和と $T^{-1}AT$が一致するように Tを選ぶことができる．

［証明］ A が実数の固有値をもつときは，定理 3.3 の証明と同様に帰納法が使えるから，A の固有値 α はすべて実数でないとする．このとき $\bar{\alpha}$ も固有値である．A を $M(n, \boldsymbol{C})$の行列と考えると，系 3.4 により，$\alpha \neq \bar{\alpha} \Longrightarrow V_\alpha$ と $V_{\bar{\alpha}}$ は直交する．$\boldsymbol{u} \in V_\alpha \Longleftrightarrow \bar{\boldsymbol{u}} \in V_{\bar{\alpha}}$ であるから，V_α の正規直交基底$\{\boldsymbol{u}_i\}$に対して，$\{\bar{\boldsymbol{u}}_i\}$は $V_{\bar{\alpha}}$ の正規直交基底となる．従って，$\boldsymbol{C}^n$ の正規直交基底$\{\boldsymbol{u}_1, \bar{\boldsymbol{u}}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m, \bar{\boldsymbol{u}}_m\}$ $(n=2m)$で，

$$A{}^t\boldsymbol{u}_j = \alpha_j{}^t\boldsymbol{u}_j, \quad A{}^t\bar{\boldsymbol{u}}_j = \bar{\alpha}_j{}^t\bar{\boldsymbol{u}}_j$$

となるものが選べる．ここで，

$$\boldsymbol{t}_{2j-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{u}_j + \bar{\boldsymbol{u}}_j), \quad \boldsymbol{t}_{2j} = \frac{\boldsymbol{i}}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{u}_j - \bar{\boldsymbol{u}}_j)$$

とおけば，$\{\boldsymbol{t}_1, \boldsymbol{t}_2, \cdots, \boldsymbol{t}_{2m}\}$は $\boldsymbol{C}^n$ の正規直交基底で，$\boldsymbol{t}_i = \bar{\boldsymbol{t}}_i$ をみたすから $\boldsymbol{t}_i \in \boldsymbol{R}^n$ であり，これらは $\boldsymbol{R}^n$ の正規直交基底をなし $T = ({}^t\boldsymbol{t}_1, \cdots, {}^t\boldsymbol{t}_{2m}) \in O(n)$.

このとき，$T^{-1}AT = \boldsymbol{r}(\alpha_1) \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{r}(\alpha_m)$ は容易に確かめられる．従って定理の前半が証明された．後半については，

$$\boldsymbol{r}(\bar{\alpha}) = {}^t(\boldsymbol{r}(\alpha)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \boldsymbol{r}(\alpha) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

に注意すれば，定理 3.3 と同様に証明される． （終）

$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{H}$ の場合には，その上の正規行列は対角成分が $\boldsymbol{C}$ に属するように対角化

できる．

定理 3.6 $A\in M(n, \boldsymbol{H})$が正規であれば，$X^{-1}AX=\lambda_1\oplus\cdots\oplus\lambda_n\,(\lambda_i\in\boldsymbol{C})$となる$X\in Sp(n)=U(n, \boldsymbol{H})$がある．ここで，$\boldsymbol{c}'(A)\in M(2n, \boldsymbol{C})$の固有値全体$=\{\lambda_1, \bar{\lambda}_1, \cdots, \lambda_n, \bar{\lambda}_n\}$であり，このような固有値の共役対$\{\lambda_i, \bar{\lambda}_i\}$から1つづつとった元の任意の順序の直和と$X^{-1}AX$が一致するように，$X$を選ぶことができる．

［証明］ まず，$\boldsymbol{c}': \boldsymbol{H}^n\to\boldsymbol{C}^{2n}$は$\boldsymbol{C}$-右加群の同型，単射$\boldsymbol{c}': M(n, \boldsymbol{H})\to M(2n, \boldsymbol{C})$は$\boldsymbol{c}'(A)\cdot{}^t\boldsymbol{c}'(\boldsymbol{v})=\boldsymbol{c}'(A\cdot{}^t\boldsymbol{v})$で与えられていることに注意する．(2.14) (1)によって，A：正規$\Longrightarrow\boldsymbol{c}'(A)$：正規．$\boldsymbol{c}'(A)$の固有値$\lambda$と$\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{H}^n$について，

$$\boldsymbol{c}'(\boldsymbol{v})\in V_\lambda\Longleftrightarrow\boldsymbol{c}'(A\cdot{}^t\boldsymbol{v})=\boldsymbol{c}'({}^t\boldsymbol{v}\lambda)\Longleftrightarrow A\cdot{}^t\boldsymbol{v}={}^t\boldsymbol{v}\lambda\Longleftrightarrow A\cdot{}^t(\boldsymbol{v}\boldsymbol{j})={}^t(\boldsymbol{v}\boldsymbol{j})\bar{\lambda}$$

であるから，$V_\lambda'=\{\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{H}^n\,|\,A\cdot{}^t\boldsymbol{v}={}^t\boldsymbol{v}\lambda\}$とおくと，

$$\boldsymbol{c}': V_\lambda'\cong V_\lambda,\quad \boldsymbol{v}\in V_\lambda'\Longleftrightarrow\boldsymbol{v}\boldsymbol{j}\in V_{\bar{\lambda}}'$$

ここで，(2.14) (2)の$J_n\in M(2n, \boldsymbol{C})$について，

$$J_n\cdot{}^t\boldsymbol{c}'(\boldsymbol{v})={}^t\overline{\boldsymbol{c}'(\boldsymbol{v}\boldsymbol{j})},\quad \boldsymbol{v}\in\boldsymbol{H}^n$$

が成り立つことを使って，$\boldsymbol{C}^{2n}$の正規直交基底$\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_{2n}\}$を，$1\leq i\leq n$につき

$$\boldsymbol{c}'(A)\cdot{}^t\boldsymbol{u}_i={}^t\boldsymbol{u}_i\lambda_i,\quad \boldsymbol{c}'(A)\cdot{}^t\boldsymbol{u}_{i+n}={}^t\boldsymbol{u}_{i+n}\bar{\lambda}_i,\quad J_n\cdot{}^t\boldsymbol{u}_i={}^t\overline{\boldsymbol{u}_{i+n}}$$

をみたすように選ぶ．実際，系3.4により，$\boldsymbol{C}^{2n}$を分解した各V_λについて考えよう．λが実数でないときは，V_λと$V_{\bar{\lambda}}$は直交するから，その一方のV_λの正規直交基底$\{\boldsymbol{u}_i\}$をとると，$\{\boldsymbol{u}_{i+n}\}$，${}^t\boldsymbol{u}_{i+n}=\overline{J_n\cdot{}^t\boldsymbol{u}_i}$，は$V_{\bar{\lambda}}$の正規直交基底となる．$\lambda$が実数の場合には，$V_\lambda'=V_{\bar{\lambda}}'$は$\boldsymbol{H}$-右加群となるから，その$\boldsymbol{H}$-右加群としての正規直交基底$\{\boldsymbol{v}_i\}$について，$\boldsymbol{u}_i=\boldsymbol{c}'(\boldsymbol{v}_i)$，$\boldsymbol{u}_{i+n}=\boldsymbol{c}'(\boldsymbol{v}_i\boldsymbol{j})(=(J_n\cdot{}^t\boldsymbol{u}_i)^*)$とおく．$\{\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_{i+n}\}$が$V_\lambda$ $(\lambda\in\boldsymbol{R})$の正規直交基底となることは，$\boldsymbol{c}': \boldsymbol{H}^n\to\boldsymbol{C}^{2n}$と内積の間に次の関係があることからわかる：$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\in\boldsymbol{H}^n$について，

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})=(\boldsymbol{c}'(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{c}'(\boldsymbol{v}))+\boldsymbol{j}\alpha\ \ (\alpha\in\boldsymbol{C}),\quad (\boldsymbol{c}'(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{c}'(\boldsymbol{u}\boldsymbol{j}))=0$$

$U=({}^t\boldsymbol{u}_1, \cdots, {}^t\boldsymbol{u}_{2n})\in U(2n, \boldsymbol{C})$とおけば，

$$\boldsymbol{c}'(A)U=U(\lambda_1\oplus\cdots\oplus\lambda_n\oplus\bar{\lambda}_1\oplus\cdots\oplus\bar{\lambda}_n)$$

$$J_nU=({}^t\bar{\boldsymbol{u}}_{n+1}, \cdots, {}^t\bar{\boldsymbol{u}}_{2n}, -{}^t\bar{\boldsymbol{u}}_1, \cdots, -{}^t\bar{\boldsymbol{u}}_n)=({}^t\bar{\boldsymbol{u}}_1, \cdots, {}^t\bar{\boldsymbol{u}}_{2n})J_n=\bar{U}J_n$$

(2.15)によって，$\boldsymbol{c}'(X)=U$となる$X\in Sp(n)$があるから

$$\boldsymbol{c}'(X^{-1}AX)=U^{-1}\boldsymbol{c}'(A)U=\lambda_1\oplus\cdots\oplus\lambda_n\oplus\bar{\lambda}_1\oplus\cdots\oplus\bar{\lambda}_n=\boldsymbol{c}'(\lambda_1\oplus\cdots\oplus\lambda_n)$$

$\boldsymbol{c}'$は単射であるから，$X^{-1}AX=\lambda_1\oplus\cdots\oplus\lambda_n$．後半は$\boldsymbol{j}^{-1}\lambda\boldsymbol{j}=\bar{\lambda}$ $(\lambda\in\boldsymbol{C})$に注意すれば容易． (終)

系 3.7　単射 $\boldsymbol{c}'$ によって，$Sp(n)\cong Sp(n,\boldsymbol{C})\cap SU(2n)$　(同型)．

特に，$\boldsymbol{c}':Sp(1)\cong SU(2)$　(同型)．

［証明］　定理の証明において，$\det(\boldsymbol{c}'(A))=\det(U^{-1}\boldsymbol{c}'(A)U)$，$U^{-1}\boldsymbol{c}'(A)U=\lambda_1\oplus\cdots\oplus\lambda_n\oplus\bar{\lambda}_1\oplus\cdots\oplus\bar{\lambda}_n\in U(2n)\Longrightarrow|\lambda_i|=1$ であるから，$\det(\boldsymbol{c}'(A))=\prod|\lambda_i|^2=1\Longrightarrow\boldsymbol{c}'(A)\in SU(2n)$．(2.15) より，$\boldsymbol{c}'(Sp(n))=Sp(n,\boldsymbol{C})\cap SU(2n)$．

$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in SU(2)$ ならば $A^{-1}=\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}=J_1{}^{-1}\,{}^tAJ_1$であるから，${}^tAJ_1A=J_1\Longrightarrow A\in Sp(1,\boldsymbol{C})$．よって，$\boldsymbol{c}'(Sp(1))=Sp(1,\boldsymbol{C})\cap SU(2)=SU(2)$．　(終)

コンパクト連結古典群とその Weyl 群

コンパクト連結 Lie 群の一般論は第5章で述べられるが，ここでは個々のコンパクトかつ連結な古典群について具体的に調べよう．定理 2.8，定理 2.18 で与えたコンパクトな古典群のうち，$O(n)$ は連続写像 $\det:O(n)\to S(\boldsymbol{R})=\{1,-1\}$ が全射であるので連結ではないから，残りのものについて考える．

$G=U(n)$，$SU(n+1)$，$SO(2n)$，$SO(2n+1)$，$Sp(n)$ のとき，次のように定義される部分群 T^n を G の**標準的極大トーラス**という．

(3.8)　$G=U(n):T^n=\{\lambda_1\oplus\cdots\oplus\lambda_n\,|\,\lambda_i\in U(1)=S(\boldsymbol{C})\subset\boldsymbol{C}\}$

$G=SU(n+1):T^n=\{\lambda_1\oplus\cdots\oplus\lambda_{n+1}\,|\,\lambda_i\in U(1),\ \prod\lambda_i=1\}$
$(=T^{n+1}\cap SU(n+1))$

(3.9)　$G=SO(2n):T^n=\{\boldsymbol{r}(\lambda_1)\oplus\cdots\oplus\boldsymbol{r}(\lambda_n)\,|\,\lambda_i\in U(1)\}$

$G=SO(2n+1):T^n=\{\boldsymbol{r}(\lambda_1)\oplus\cdots\oplus\boldsymbol{r}(\lambda_n)\oplus1\,|\,\lambda_i\in U(1)\}\,(=T^n\times1)$

(3.10)　$G=Sp(n):T^n=\{\lambda_1\oplus\cdots\oplus\lambda_n\,|\,\lambda_i\in\boldsymbol{q}(U(1))\subset\boldsymbol{H}\}$

$T=U(1)$は円周 $S^1\cong S(\boldsymbol{C})$ に同相であり，上の各 T^n は n 個の T の直積と同型である．よって，T^n は(位相的に見て)n 次元トーラスである．また，T^n は(弧状)連結，コンパクトかつ可換な位相群である．

定理 3.11　$G=U(n)$，$SU(n+1)$，$SO(2n)$，$SO(2n+1)$，$Sp(n)$ に対して，上の標準的極大トーラス T^n をとるとき，

$$G=\bigcup_{g\in G}gT^ng^{-1}$$

［証明］　G の元(行列)A は(3.1)によって正規である．$G=U(n)$，$Sp(n)$ のときは，定理 3.4，定理 3.6 によって，$g^{-1}Ag=\lambda_1\oplus\cdots\oplus\lambda_n$，$(\lambda_i\in\boldsymbol{C})$となる $g\in G$

がある．また $g^{-1}Ag\in G$ より各 λ_i は $U(1)$ に属する．故に，$g^{-1}Ag\in T^n \Longrightarrow A \in gT^ng^{-1}$．$A$ は任意であるから，$G=\cup gT^ng^{-1}$．

$G=SU(n+1)$ のときは，$A\in U(n+1)$ と考えて，$U^{-1}AU=\lambda_1\oplus\cdots\oplus\lambda_{n+1}$ となる $U\in U(n+1)$ がある．ここで，$\prod\lambda_i=\det(U^{-1}AU)=\det A=1$．$|\det U|=1$ であるから，$\det U=c^{n+1}$ となる $c\in \boldsymbol{C}$ を選んで $g=c^{-1}U$ とおけば，$g\in SU(n+1)$ かつ $g^{-1}Ag=\lambda_1\oplus\cdots\oplus\lambda_{n+1}\in T^n$ となる．

$m=2n$，$2n+1$ とし，$A\in SO(m)$ を考える．定理 3.5 により，$g\in O(m)$ があって，$B=g^{-1}Ag=\boldsymbol{r}(\lambda_1)\oplus\cdots\oplus\boldsymbol{r}(\lambda_k)\oplus t_1\oplus\cdots\oplus t_{m-2k}$ $(\lambda_i\in\boldsymbol{C},\ t_j\in\boldsymbol{R})$ となる．B はまた $SO(m)$ に属するから，$B^tB=I_m$ かつ $\det B=1$．$B^tB=I_m\Longrightarrow \boldsymbol{r}(\lambda_i)\in O(2)$，$t_i\in O(1) \Longrightarrow \lambda_i\in U(1)$，$t_j=\pm1$．$\det B=\det(\boldsymbol{r}(\lambda_i))=1\Longrightarrow t_j=-1$ となる t_j の個数は偶数．t_j の順序を入れ換えてもよいことと，$\boldsymbol{r}(1)=1\oplus1$，$\boldsymbol{r}(-1)=(-1)\oplus(-1)$ より，結局，$B\in T^n$ となるように g がとれることがわかる．$\det g=-1$ のときは，g を $((-1)\oplus I_{m-1})g\in SO(m)$ におきかえると，$((-1)\oplus1)^{-1}\boldsymbol{r}(\lambda_1)((-1)\oplus1)=\boldsymbol{r}(\bar{\lambda}_1)$ によって，やはり $g^{-1}Ag\in T^n$ となる．（終）

系 3.12 $U(n)$，$SO(n)$，$Sp(n)$ は弧状連結である．

［証明］ gT^ng^{-1} は T^n と同相であるから弧状連結であり，単位元を共有する．従って，$G=\cup gT^ng^{-1}$ は弧状連結である．（終）

定義 定理 3.11 の各 G における T^n の正規化群 $N(T^n)$ について，商群

$$W(G)=N(T^n)/T^n$$

を G の **Weyl 群**という．

G の Weyl 群 $W(G)$ は次のように G の標準的極大トーラスに作用する：

$$\mu: W(G)\times T^n \longrightarrow T^n \Longleftrightarrow \mu(\varphi,t)=ntn^{-1}\ (\varphi=nT^n\in W(G),\ t\in T^n)$$

この定義は $\varphi\in W(G)$ の代表元 $n\in N(T^n)$ のとり方によらずに定まる．

定理 3.13 $W(G)$ の T^n への作用は効果的である．従って，$W(G)$ の元を T^n の位相変換とみることができる．この意味で，各 G について，$W(G)$ は次のような変換からなる有限群である．T^n の点 t を $U(1)$，$\boldsymbol{r}(U(1))$ または $\boldsymbol{q}(U(1))$ の元（座標）λ_i の直和で表わすとき，

$G=U(n)$ ： T^n の座標の置換 $\sigma:\lambda_1\oplus\cdots\oplus\lambda_n\to\lambda_{\sigma(1)}\oplus\cdots\oplus\lambda_{\sigma(n)}$

$G=SU(n+1)$ ： T^n の座標の置換 $\sigma:\lambda_1\oplus\cdots\oplus\lambda_{n+1}\to\lambda_{\sigma(1)}\oplus\cdots\oplus\lambda_{\sigma(n+1)}$

$G=SO(2n)$: T^n の座標の置換と偶数個の座標の符号の変換の合成

$$\lambda_1\oplus\cdots\oplus\lambda_n\to\lambda_{\sigma(1)}^{\varepsilon(1)}\oplus\cdots\oplus\lambda_{\sigma(n)}^{\varepsilon(n)},\ \ \varepsilon(i)=\pm1,\ \ \prod\varepsilon(i)=1$$

$G=SO(2n+1)$: T^n の座標の置換と符号の変換の合成

$$\lambda_1\oplus\cdots\oplus\lambda_n\to\lambda_{\sigma(1)}^{\varepsilon(1)}\oplus\cdots\oplus\lambda_{\sigma(n)}^{\varepsilon(n)},\ \ \varepsilon(i)=\pm1$$

$G=Sp(n)$: $G=SO(2n+1)$ と同様.

［証明］　［$G=U(n)$ の場合］$\varphi\in W(U(n))$ の代表元を $A=(a_{ij})\in N(T^n)\subset U(n)$ とすると，任意の $t\in T^n$ に対して，$At=t'A$ となる $t'\in T^n$ がなければならない．$t=\lambda_1\oplus\cdots\oplus\lambda_n$，$t'=\lambda_1'\oplus\cdots\oplus\lambda_n'$ とおくと，この条件は次と同値である：

$$a_{ij}\lambda_j=\lambda_i'a_{ij}\quad(i,j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

A は正則であるから，各 i に対して $a_{ij}\neq0$ となる j が存在し，そのとき $\lambda_j=\lambda_i'$ である．t は任意であるから，各 λ_j が相異なるように選べば，各 j に対して，$\lambda_j=\lambda_i'$ となる i は唯1つである．従って，$\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$ のそれ自身への単射，即ち，置換 σ が存在して，$\lambda_i'=\lambda_{\sigma(i)}$．故に，$\varphi$ の T^n への作用は置換であり，逆に任意の置換 σ は，$\varphi=\{P_\sigma\}$，$P_\sigma=(\delta_{i\sigma(i)})\in N(T^n)$，によってひきおこされる．よって，この作用が効果的であることを示せばよい．

$\varphi=\{A\}$ の作用が自明ならば，任意の $t\in T^n$ について，$tA=At$．上の議論で，$\lambda_i=\lambda_i'$ の場合であるから，$i\neq j\Longrightarrow a_{ij}=0$．即ち，$A\in D(n,\ \boldsymbol{C})\cap U(n)=T^n\Longrightarrow\varphi=e$．従って，$W(U(n))$ の作用は効果的である．

［$G=SU(n+1)$ の場合］　上と同様な議論が成り立つ．ただし，置換 σ をひきおこす φ としては $(\mathrm{sign}\,\sigma\oplus I_n)P_\sigma$ の類をとることだけが異なる．

［$G=Sp(n)$ の場合］　$U(n)$ の場合の証明法を使うために次が必要である．

(3.14)　$\lambda,\lambda'\in\boldsymbol{q}(U(1))\subset Sp(1)$，$q\in\boldsymbol{H}$ について，

$$q\lambda=\lambda'q,\ \ q\neq0\Longrightarrow\lambda'=\lambda \text{ または } \lambda'=\bar{\lambda}(=\lambda^{-1})$$

$$q\lambda=\lambda q\Longrightarrow q\in\boldsymbol{C} \text{ または } \lambda=\bar{\lambda}\ \ (\in\boldsymbol{R})$$

これは，直接四元数の計算をするか，あるいは，単射 $\boldsymbol{c}':\boldsymbol{H}=M(1,\ \boldsymbol{H})\longrightarrow M(2,\ \boldsymbol{C})$ と $\boldsymbol{c}'(\boldsymbol{q}(\alpha))=\alpha\oplus\bar{\alpha}$ を用いて，$G=SU(2)$ の場合の定理から導かれる．

この(3.14)を使い，t は $\{\lambda_j,\ \bar{\lambda}_j\}$ が全て異なるように選ぶことにすれば，定理の証明は $G=U(n)$ の場合と同様である．ただし，座標の符号を変えるには $\boldsymbol{j}$ を作用させればよい：$\boldsymbol{j}\lambda\boldsymbol{j}^{-1}=\bar{\lambda}$.

［$G=SO(2n)$，$SO(2n+1)$ の場合］　(3.14)に相当するものは次である．

(3.15) $\lambda, \lambda' \in \boldsymbol{r}(U(1)) \subset SO(2)$, $B \in M(2, \boldsymbol{R})$ について,

$$B\lambda = \lambda' B,\ B \neq 0 \Longrightarrow \lambda' = \lambda \text{ または } \lambda' = \lambda^{-1}$$

$$B\lambda = \lambda B \Longrightarrow B = tB',\ t \in \boldsymbol{R},\ B' \in SO(2)$$

これも, 直接2次の行列の計算をするか, あるいは, 単射 $\boldsymbol{c} : M(2, \boldsymbol{R}) \longrightarrow M(2, \boldsymbol{C})$ と $\boldsymbol{c}(\boldsymbol{r}(\alpha)) = \alpha \oplus \bar{\alpha}$ を用いて示される.

$G = SO(2n)$ の場合には, $A \in SO(2n) \subset M(2n, \boldsymbol{R})$ を2行2列のブロックに分けて, $A = (A_{ij})$, $A_{ij} \in M(2, \boldsymbol{R})$, とおく. $At = t'A \Longleftrightarrow A_{ij}\lambda_j = \lambda_i' A_{ij}$ は前と同様. ここで, 互換 τ に対応する $P_\tau = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ について, $P_\tau \lambda P_\tau^{-1} = \lambda^{-1}$ であることに注意すれば, (3.15)を用いて, $W(SO(2n))$ の作用は効果的であり, その作用は A を $O(2n)$ にとることを許せば $W(Sp(n))$ と同様で, $\varphi = \{A\}$ の各代表元として $A = (P_\tau^{\varepsilon(1)} \oplus \cdots \oplus P_\tau^{\varepsilon(n)}) P_{\sigma'}$ がとれる. ただし, σ' は $\sigma'(2i-1) = 2\sigma(i) - 1$, $\sigma'(2i) = 2\sigma(i)$ で与えられる偶置換, $\varepsilon(i) = 0, 1$. $\det A = \prod(-1)^{\varepsilon(i)}$ であるから, $A \in SO(2n) \Longleftrightarrow \prod \varepsilon(i) = 1$. よって, $G = SO(2n)$ の場合が確かめられる.

$G = SO(2n+1)$ の場合には, A, t, t' 等を $A \oplus 1$, $t \oplus 1$, $t' \oplus 1 \in SO(2n+1)$ におきかえて考えればよい. $t \oplus 1 = \lambda_1 \oplus \cdots \oplus \lambda_n \oplus \boldsymbol{r}(1)$ の形であることに注意すれば, $W(SO(2n+1))$ の各元は $\{(P_\tau^{\varepsilon(1)} \oplus \cdots \oplus P_\tau^{\varepsilon(n)} \oplus \prod \varepsilon(i))(P_{\sigma'} \oplus 1)\}$ で表わされ, この場合も定理の正しいことがわかる. (終)

$\sum_n = \{\sigma : n$ 文字の置換$\}$ を対称群, $A_n = \{\sigma : n$ 文字の偶置換$\}$ を交代群, H_n を次のように与えられる $\sum_{2n}$ の部分群とする($H_n = \sum_n \int \sum_2$: wreath 積) :

$$\sigma \in H_n \Longleftrightarrow \rho \in \textstyle\sum_n \text{ があって, } \sigma\{2i-1,\ 2i\} = \{2\rho(i)-1,\ 2\rho(i)\}.$$

系 3.16 $W(U(n)) \cong \sum_n$, $W(SU(n+1)) \cong \sum_{n+1}$, $W(Sp(n)) \cong H_n$,
$W(SO(2n)) \cong H_n \cap A_{2n}$, $W(SO(2n+1)) \cong H_n$ (同型)

§4 行列の指数写像と古典群の極分解

行列の指数写像

$A = (a_{ij}) \in M(n, \boldsymbol{F})$ $(\boldsymbol{F} = \boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{H})$ に対して, 行列の級数

$$I_n + A + A^2/2! + \cdots + A^k/k! + \cdots$$

を考える. $\mathrm{Max}|a_{ij}| < r$ ならば, $A^k = (a_{ij}^{(k)})$ について $|a_{ij}^{(k)}| < (nr)^k$ であるから, 上の行列の級数の各成分の絶対値のなす級数は $\sum (nr)^k/k! = e^{nr}$ でおさえ

られる．このことから，次がえられる．

(4.1)　$\exp : M(n, \boldsymbol{F}) \to M(n, \boldsymbol{F}) \Longleftrightarrow \exp A = \sum_{k=0}^{\infty} A^k/k!$，は $M(n, \boldsymbol{F}) = \boldsymbol{R}^{dn^2}$ (または $M(n, \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{C}^{n^2}$)とみて解析的写像である．

この exp を**行列の指数写像**，$\exp A$ を A の**指数行列**という．

次の性質は容易に確かめられる：

(4.2)　(1)　$AB = BA \Longrightarrow \exp(A+B) = \exp A \cdot \exp B$,

特に，$\exp(-A) = (\exp A)^{-1}$

(2)　$\exp(M(n, \boldsymbol{F})) \subset GL(n, \boldsymbol{F})$

(3)　$P \in GL(n, \boldsymbol{F}) \Longrightarrow \exp(PAP^{-1}) = P(\exp A)P^{-1}$

(4)　$\exp(A^*) = (\exp A)^*$

(5)　$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}$ のとき，

$\exp({}^tA) = {}^t(\exp A)$,　$\exp(\overline{A}) = \overline{\exp A}$,　$\det(\exp A) = e^{\mathrm{tr}(A)}$,

A の固有値 $= \{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\} \Longrightarrow \exp A$ の固有値 $= \{e^{\lambda_1}, \cdots, e^{\lambda_n}\}$

定理 4.3　指数写像 exp は零行列 O の近傍から，単位行列 I_n の近傍への同相写像である(即ち，exp は O における**局所同相**)．

［証明］ $M(n, \boldsymbol{F}) = \boldsymbol{R}^{dn^2}$ とみるとき，exp の O における Jacobi 行列は I_{dn^2} である．定理は陰関数の定理からえられる．　(終)

系 4.4　各古典群に対して，$\exp : M(n, \boldsymbol{F}) \to GL(n, \boldsymbol{F})$ は下の各($\boldsymbol{R}$ 上の)部分空間からの局所同相を与える：

$\{A \in M(n, \boldsymbol{F}) \mid A^* = -A\} \longrightarrow U(n, \boldsymbol{F})$

$\{A \in M(n, \boldsymbol{F}) \mid \mathrm{tr}(A) = 0\} \longrightarrow SL(n, \boldsymbol{F})$　　$(\boldsymbol{F} = \boldsymbol{R}, \boldsymbol{C})$

$\{A \in M(n, \boldsymbol{F}) \mid A^* = -A,\ \mathrm{tr}(A) = 0\} \longrightarrow SU(n, \boldsymbol{F})$　　$(\boldsymbol{F} = \boldsymbol{R}, \boldsymbol{C})$

$\{A \in M(n, \boldsymbol{F}) \mid {}^tA = -A\} \longrightarrow O(n, \boldsymbol{F})$　　$(\boldsymbol{F} = \boldsymbol{R}, \boldsymbol{C})$

$\{A \in M(2n, \boldsymbol{F}) \mid J_nAJ_n^{-1} = -{}^tA\} \longrightarrow Sp(n, \boldsymbol{F})$　　$(\boldsymbol{F} = \boldsymbol{R}, \boldsymbol{C})$

［証明］ (4.2)より，上の各条件が古典群を定義する条件と対応する．(終)

定理 4.5　$U(n) = U(n, \boldsymbol{C})$，$Sp(n) = U(n, \boldsymbol{H})$，$SO(n) = SU(n, \boldsymbol{R})$，$SU(n) = SU(n, \boldsymbol{C})$に対して，系 4.4 で与えられた写像は全射である．

［証明］ $T^n \subset U(n)$ と $L = \{a_1\boldsymbol{i} \oplus \cdots \oplus a_n\boldsymbol{i} \mid a_i \in \boldsymbol{R}\}$ について，$\exp : L \to T^n$ は全射である．$g \in U(n)$について，$gLg^{-1} \subset \{A \in M(n, \boldsymbol{C}) \mid A^* = -A\}$ であるから，(4.2) (3) と定理 3.11 により，系 4.4 の写像は $U(n)$ への全射．他も同様．　(終)

Hermite 行列

定義 $H(n, \boldsymbol{F})=\{A\in M(n, \boldsymbol{F}) \mid A^*=A\}$ の行列を **Hermite 行列**という．

次は明らかであろう：

(4.6) (1) $A\in H(n, \boldsymbol{F}) \Longrightarrow A$ は正規，

(2) $A\in H(n, \boldsymbol{F}),\ U\in U(n, \boldsymbol{F}) \Longrightarrow UAU^{-1}\in H(n, \boldsymbol{F})$

(3) $H(n, \boldsymbol{F})\cap D(n, \boldsymbol{F})=D(n, \boldsymbol{R})$

補題 4.7 任意の $A\in H(n, \boldsymbol{F})$ に対して，$UAU^{-1}\in D(n, \boldsymbol{R})$ となる $U\in U(n, \boldsymbol{F})$ が存在し，UAU^{-1} の対角成分(実数)は順序を除いて一意的に定まる．

［証明］ $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{C}, \boldsymbol{H}$ の場合は，定理 3.3，定理 3.6，および (4.6) (3) より明らか．$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{R}$ の場合も定理 3.5 において，$T^{-1}AT\in H(n, \boldsymbol{F})$ より $\boldsymbol{r}(\lambda_i)^*=\boldsymbol{r}(\lambda_i) \Longrightarrow \overline{\lambda}_i=\lambda_i \Longrightarrow \lambda_i\in\boldsymbol{R}$ がえられるから，$T^{-1}AT\in D(n, \boldsymbol{R})$となる． (終)

定義 補題 4.7 における UAU^{-1} の対角成分を Hermite 行列 A の**固有値**という．固有値がすべて正である Hermite 行列を**正値 Hermite 行列**という．

記号 $H^+(n, \boldsymbol{F})=\{A\in H(n, \boldsymbol{F}) \mid A$ は正値$\}$

補題 4.8 $\exp|H(n, \boldsymbol{F})$ は $H(n, \boldsymbol{F})$ から $H^+(n, \boldsymbol{F})$ の中への単射である．

［証明］ $A\in H(n, \boldsymbol{F})$ に対して，$UAU^{-1}=\lambda_1\oplus\cdots\oplus\lambda_n,\ \lambda_i\in\boldsymbol{R}$, となる $U\in U(n, \boldsymbol{F})$をとると，$U(\exp A)U^{-1}=\exp(UAU^{-1})=e^{\lambda_1}\oplus\cdots\oplus e^{\lambda_n},\ \ e^{\lambda_i}>0$，となるから，$\exp A\in H^+(n, \boldsymbol{F})$ である．ここで，置換行列を用いて，

$$UAU^{-1}=a_1I_{n_1}\oplus\cdots\oplus a_rI_{n_r},\quad a_1<a_2<\cdots<a_r,\quad n_1+\cdots+n_r=n$$

となるように Uを選ぶ．いま，$\exp A=\exp B,\ B\in H(n, \boldsymbol{F})$とし，

$$U_0BU_0^{-1}=b_1I_{m_1}\oplus\cdots\oplus b_sI_{m_s},\quad b_1<b_2<\cdots<b_s,\quad m_1+\cdots+m_s=n$$

となる U_0 を選ぶ．$\exp A$ の固有値は$\{n_i$ 個の $e^{a_i}\}$，$e^{a_1}<\cdots<e^{a_r}$．$\exp B$ も同様であるから，$r=s,\ a_i=b_i,\ n_i=m_i (i=1, \cdots, r)$がわかる．よって，

$$UAU^{-1}=U_0BU_0^{-1}=a_1I_{n_1}\oplus\cdots\oplus a_rI_{n_r}$$

$$U_0U^{-1}(e^{a_1}I_{n_1}\oplus\cdots\oplus e^{a_r}I_{n_r})=U_0\exp AU^{-1}=(e^{a_1}I_{n_1}\oplus\cdots\oplus e^{a_r}I_{n_r})U_0U^{-1}$$

第2式を各成分で比較すれば，$U_0U^{-1}=U_1\oplus\cdots\oplus U_r$ となる $U_i\in U(n_i, \boldsymbol{F})$ のあることがわかる．このとき，U_0U^{-1} は $a_1I_{n_1}\oplus\cdots\oplus a_rI_{n_r}=UAU^{-1}$ と可換であるから，

$$U_0BU_0^{-1}=UAU^{-1}=(U_0U^{-1})(UAU^{-1})(U_0U^{-1})^{-1}=U_0AU_0^{-1} \Longrightarrow B=A$$

よって，exp が $H(n, \boldsymbol{F})$上で単射であることがわかった． (終)

補題 4.9　$\exp : H(n,\ \boldsymbol{F}) \to H^+(n,\ \boldsymbol{F})$ は同相写像である．

［証明］　まず，$D^+(n,\ \boldsymbol{R}) = H^+(n,\ \boldsymbol{F}) \cap D(n,\ \boldsymbol{R}) = \{\nu_1 \oplus \cdots \oplus \nu_n \mid \nu_i > 0\}$ について，

$$\log : D^+(n,\ \boldsymbol{R}) \to D(n,\ \boldsymbol{R}) \Longleftrightarrow \log(\nu_1 \oplus \cdots \oplus \nu_n) = \log \nu_1 \oplus \cdots \oplus \log \nu_n$$

とおく．log は同相写像で，$\exp : D(n,\ \boldsymbol{R}) \to D^+(n,\ \boldsymbol{R})$ の逆写像である．

任意の $A \in H^+(n,\ \boldsymbol{F})$ について，$UAU^{-1} \in D^+(n,\ \boldsymbol{R})$ となる U がある．$B = \log(UAU^{-1})$ とおけば，$\exp(U^{-1}BU) = U^{-1}(\exp B)U = U^{-1}(UAU^{-1})U = A$．よって，exp は全射．補題 4.8 によって，exp は連続な全単射となるから，同相を示すにはこれが閉写像であることを示せばよい．即ち，$H(n,\ \boldsymbol{F})$ の閉集合 X から点列 $A_1,\ A_2,\ \cdots$ をとり，$\lim \exp A_i = B \in H^+(n,\ \boldsymbol{F})$ ならば，$B \in \exp(X)$ であることを示せばよい．

いま，各 A_i について，$U_i A_i U_i^{-1} = D_i \in D(n,\ \boldsymbol{R})$ となる $U_i \in U(n,\ \boldsymbol{F})$ を選ぶ．$U(n,\ \boldsymbol{F})$ はコンパクト(定理 2.8，定理 2.18)であるから，収束する $\{U_i\}$ の部分列がある．点列をとりかえて，初めから $U = \lim U_i \in U(n,\ \boldsymbol{F})$ としてよい．

$\lim \exp D_i = \lim \exp(U_i A_i U_i^{-1}) = \lim U_i (\exp A_i) U_i^{-1} = UBU^{-1} \in D^+(n,\ \boldsymbol{R})$ であるから，$D = \log(UBU^{-1}) \in D(n,\ \boldsymbol{R})$ とおくと，log の連続性により，

$$D = \log(\lim \exp D_i) = \lim \log \exp D_i = \lim D_i$$

$A = U^{-1}DU$ とおけば，X は閉集合であるから，

$$A = U^{-1}(\lim D_i)U = \lim U^{-1} D_i U = \lim U_i^{-1} D_i U_i = \lim A_i \in X$$

$$B = \lim \exp A_i = \exp \lim A_i = \exp A \in \exp(X)$$　（終）

系 4.10　$H(n,\ \boldsymbol{F})$，$H^+(n,\ \boldsymbol{F})$ はともに $\boldsymbol{R}^{dn(n-1)/2+n}$ に同相である

［証明］　$H(n, \boldsymbol{F})$ は $M(n, \boldsymbol{F}) \cong \boldsymbol{R}^{dn^2}$ の $\boldsymbol{R}$-部分空間であり，その行列 $A = (a_{ij})$ は $a_{ii} \in \boldsymbol{R}$ と $a_{ij} \in \boldsymbol{F} (i < j)$ で定まる．故に，$\dim_{\boldsymbol{R}} H(n, \boldsymbol{F}) = dn(n-1)/2 + n$．（終）

コンパクトでない古典群の極分解

定理 4.11　$f : U(n,\ \boldsymbol{F}) \times H(n,\ \boldsymbol{F}) \longrightarrow GL(n,\ \boldsymbol{F}) \Longleftrightarrow f(U,\ H) = U \cdot \exp H$ は同相写像である．従って，

$$GL(n,\ \boldsymbol{F}) \cong U(n,\ \boldsymbol{F}) \times \boldsymbol{R}^{dn(n-1)/2+n} \quad \text{（同相）}$$

［証明］　補題 4.9，系 4.10 によって，

$$g : U(n,\ \boldsymbol{F}) \times H^+(n,\ \boldsymbol{F}) \longrightarrow GL(n,\ \boldsymbol{F}) \Longleftrightarrow g(U,\ H) = UH$$

が同相写像であることを示せばよい．補題 4.9 の同相 exp を用いて，

$$\sqrt{}\ : H^+(n,\ \boldsymbol{F}) \longrightarrow H^+(n,\ \boldsymbol{F}) \Longleftrightarrow \sqrt{B} = \exp\left(\frac{1}{2}\exp^{-1}B\right)$$

と定義すると，$\sqrt{}$ は $(\sqrt{B})^2 = B$ をみたす同相写像である．

g の逆写像を作ろう．$A \in GL(n,\ \boldsymbol{F})$ について，$(A^*A)^* = A^*A^{**} = A^*A \in H(n,\ \boldsymbol{F})$．$P(A^*A)P^{-1} = D \in D(n,\ \boldsymbol{R})$ となる $P \in U(n,\ \boldsymbol{F})$ を選び，$B = PAP^{-1} = (b_{ij})$ とおくと，$D = B^*B$ であるからその対角成分 $\lambda_i = \sum \overline{b}_{ji} b_{ji} = \sum |b_{ji}|^2 \geq 0$．故に，$A^*A \in H^+(n,\ \boldsymbol{F})$．さらに，$H = \sqrt{A^*A}$，$U = AH^{-1}$ とおけば，$H = H^*$，$HH^{-1} = I_n \Longrightarrow (H^{-1})^*H^* = (H^{-1})^*H = I_n \Longrightarrow (H^{-1})^* = H^{-1}$ であるから，

$$UU^* = AH^{-1}(AH^{-1})^* = AH^{-1}H^{-1}A^* = A(H^2)^{-1}A^* = A(A^*A)^{-1}A^* = I_n$$

従って，$U \in U(n,\ \boldsymbol{F})$ となり，連続写像

$$h : GL(n,\ \boldsymbol{F}) \to U(n,\ \boldsymbol{F}) \times H^+(n,\ \boldsymbol{F}) \Longleftrightarrow h(A) = (AH^{-1},\ H),\quad H = \sqrt{A^*A}$$

が定義される．明らかに，$gh(A) = (AH^{-1})H = A$．逆に $hg(U,\ H) = h(UH) = (UHH_0^{-1},\ H_0)$ において，$H_0 = \sqrt{(UH)^*UH} = \sqrt{H^*U^*UH} = \sqrt{H^2} = H$，$UHH_0^{-1} = U$ である．よって，g と h は互いに逆な連続写像で，g は同相写像である．　　(終)

$GL(n,\ \boldsymbol{F})$ 以外のコンパクトでない古典群について次の定理がえられる．

系 4.12　$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}$ とするとき，定理 4.11 の f は以下の同相を与える：

(1)　$SU(n,\ \boldsymbol{F}) \times \boldsymbol{R}^{dn(n-1)/2+n-1} \cong SL(n,\ \boldsymbol{F})$

(2)　$U(n) \times \boldsymbol{R}^{n(n+1)} \cong Sp(n,\ \boldsymbol{R})$，　　$Sp(n) \times \boldsymbol{R}^{n(2n+1)} \cong Sp(n,\ \boldsymbol{C})$

(3)　$O(n) \times \boldsymbol{R}^{n(n-1)/2} \cong O(n,\ \boldsymbol{C})$

［証明］　定理の f は次の同相を与えることが確かめられる：

$$SU(n,\ \boldsymbol{F}) \times \{A \in H(n,\ \boldsymbol{F}) \mid \mathrm{tr}(A) = 0\} \longrightarrow SL(n,\ \boldsymbol{F})$$

$$\boldsymbol{r}(U(n)) \times \{A \in H(2n,\ \boldsymbol{R}) \mid {}^tA + J_nAJ_n{}^{-1} = O\} \longrightarrow Sp(n,\ \boldsymbol{R})$$

$$\boldsymbol{c}'(Sp(n)) \times \{A \in H(2n,\ \boldsymbol{C}) \mid {}^tA + J_nAJ_n{}^{-1} = O\} \longrightarrow Sp(n, \boldsymbol{C})$$

$$\boldsymbol{c}(O(n)) \times \{A \in H(n,\ \boldsymbol{C}) \mid A + \overline{A} = O\} \longrightarrow O(n,\ \boldsymbol{C})$$

この各 $\{A \in \cdots\}$ は $\boldsymbol{R}$ 上の線型空間で，それらの次元は系のようになる．(終)

一般に位相群 G にその(極大)コンパクト部分群 H と $\boldsymbol{R}^m$ に同相な部分空間があって，G における積によって，同相

$$H \times \boldsymbol{R}^m \cong G$$

がえられるとき，この同相を G の**極分解**という．一般に連結な Lie 群は極分解(**岩沢分解**)をもつことが知られている．

極分解 $H\times \boldsymbol{R}^m\cong G$ をもつ位相群 G の(一般)コホモロジー，ホモトピー群等のホモトピー型不変な位相的性質は，コンパクト部分群 H の位相的性質と同一視することができる．従って，本書では，コンパクト位相群，特に前半ではコンパクトな古典群 $O(n)$，$SO(n)$，$U(n)$，$SU(n)$，$Sp(n)$ に関する位相的性質を調べようというわけである．

§5　微分多様体と Lie 群

微分多様体

定義　M：$\boldsymbol{m}$ **次元位相多様体**$\Longleftrightarrow M$ は Hausdorff 空間で，その各点は m 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^m$ の開集合と同相な近傍をもつ．

このとき，M の開被覆 $M=\cup_\alpha U_\alpha$ と $\boldsymbol{R}^m$ の開集合 V_α から U_α の上への同相写像 $\psi_\alpha: V_\alpha\cong U_\alpha$ がある．$U_\alpha\cap U_\beta\neq\phi$ ならば，

$$f_{\beta\alpha}=\psi_\beta{}^{-1}\psi_\alpha: V_\alpha\cap\psi_\alpha{}^{-1}(U_\alpha\cap U_\beta)\longrightarrow V_\beta\cap\psi_\beta{}^{-1}(U_\alpha\cap U_\beta)$$

は同相写像である．$\{U_\alpha, \psi_\alpha\}$ を位相多様体 M の**座標近傍**(**系**)，$f_{\beta\alpha}$ を**庭標変換**という．

明らかに，位相多様体は局所コンパクトである．通例，位相多様体はパラコンパクト性(第2章，§2参照)を仮定する．

(5.1)　等質空間，特に位相群，の1点が $\boldsymbol{R}^m$ の開集合と同相な近傍をもてば，それは m 次元位相多様体である．

V を $\boldsymbol{R}^m$ の開集合，$f: V\to\boldsymbol{R}^n$ を関数(写像)，$\boldsymbol{x}\in V$ とする．

$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}\in V$ となる長さ$\|\boldsymbol{h}\|$の十分小さい $\boldsymbol{h}\in\boldsymbol{R}^m$ について，

$$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})=f(\boldsymbol{x})+f'(\boldsymbol{x})\boldsymbol{h}+\boldsymbol{o}(\|\boldsymbol{h}\|)$$

となる $f'(\boldsymbol{x})\in\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{R}^m, \boldsymbol{R}^n)$ があるとき，$f'(\boldsymbol{x})$ は f の $\boldsymbol{x}$ における**微分**であるという．ここで，$\boldsymbol{o}(t)\in\boldsymbol{R}^n$ $(t\in\boldsymbol{R})$ は $t\to 0$ のとき $\|\boldsymbol{o}(t)/t\|\to 0$ となるベクトルを表わす．$\boldsymbol{x}=(x_1, \cdots, x_m)$，$\boldsymbol{h}=(h_1, \cdots, h_m)$，$f(\boldsymbol{x})=(f_1(\boldsymbol{x}), \cdots, f_n(\boldsymbol{x}))$，$f'(\boldsymbol{x})\boldsymbol{h}=(\sum a_{i1}h_i, \cdots, \sum a_{in}h_i)$ とするとき，$a_{ij}=\dfrac{\partial}{\partial x_j}f_i(\boldsymbol{x})$ である．

$\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{R}^m, \boldsymbol{R}^n)$ を $\boldsymbol{R}^{mn}$ と同一視して，$f': V\to\boldsymbol{R}^{mn}$ と見るとき，2次微分

$f''=(f')'\in \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{R}^m,\ \boldsymbol{R}^{mn})$ を考えることができる．これを繰り返すと，逐次微分 f', f'', …, $f^{(r)}$, …が考えられる．f', f'', …, $f^{(r)}$ が存在して連続であるとき，f は **C^r- 関数**であるという．

すべての自然数 r について，f が C^r- 関数であるとき，f は **C^∞- 関数**または**可微分関数**であるという

さらに，f が V の各点の近傍で，一様に絶対収束する無限級数に展開できるときには，f は **C^ω- 関数**または**実解析関数**であるという．

我々は，$0<1<2<\cdots<r<\cdots<\infty<\omega$ と考える．

定義　位相多様体 M の 座標近傍 $\{U_\alpha,\ \psi_\alpha\}$ が **C^r- 級**である ($r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ \infty,\ \omega$)$\Longleftrightarrow$座標変換 $f_{\beta\alpha}$ はすべて C^r- 関数である．

もちろん，$s\leq r$ のとき，C^r- 級$\Longrightarrow C^s$- 級．

定義　C^r- 級座標近傍 $\{U_\alpha,\ \psi_\alpha\}$，$\{V_\beta,\ \varphi_\beta\}$をもつ位相多様体 M, M' の間の **C^s- 写像** $(s\leq r)$　$f:M\to M'$

$\Longleftrightarrow f(U_\alpha)\cap V_\beta\neq\phi$ のとき，$\varphi_\beta{}^{-1}f\psi_\alpha:\psi_\alpha{}^{-1}(U_\alpha\cap f^{-1}(V_\beta))\longrightarrow\varphi_\beta{}^{-1}(V_\beta\cap f(U_\alpha))$ は C^s- 関数．

さらに，この f が同相で逆写像 f^{-1} も C^s- 写像のときには **C^s- 同相**という．

2つの C^r- 級座標近傍をもつ(同じ)位相多様体 M が **C^s- 同値** $(s\leq r)$

$\Longleftrightarrow$恒等写像 $1_M:M\to M$ が 2つの座標近傍に関して C^s- 同相．

この C^s- 同値は，明らかに同値関係である．

定義　**C^r- 多様体** $M\Longleftrightarrow C^r$- 級座標近傍をもつ位相多様体 M の C^r- 同値類．

このとき，座標近傍の C^r- 同値類を M の**(C^r-)微分構造**という．

我々は，専ら C^∞- 多様体を取扱うので，これを**微分多様体**ということにする．C^∞- 同相を**微分同相**ともいう．

例えば，$\boldsymbol{R}^m$ の開集合 U は$\{U,\ 1_U\}$を座標近傍とする微分多様体である．特に，一般線型群 $GL(n,\ \boldsymbol{F})$ は dn^2 次元微分多様体である．

$\{U_\alpha,\ \psi_\alpha\}$，$\{U_\beta{}',\ \psi_\beta{}'\}$を座標近傍にもつ微分多様体 M, N について，**積多様体** $M\times N$ はその座標近傍に $\{U_\alpha\times U_\beta{}',\ \psi_\alpha\times\psi_\beta{}'\}$をとることによって与えられる．

(5.2)　(1)　射影 $\pi_1:M\times N\to M$,　$\pi_2:M\times N\to N$ は C^∞- 写像．

　　　(2)　$f:L\to M\times N:C^\infty$- 写像$\Longleftrightarrow\pi_1 f$,　$\pi_2 f:C^\infty$- 写像．

微分多様体の接バンドル

m 次元微分多様体 M の座標近傍 $\{U_\alpha,\ \psi_\alpha\}$ と座標変換 $f_{\beta\alpha}=\psi_\beta{}^{-1}\psi_\alpha$ について，位相和 $\coprod_\alpha U_\alpha\times\boldsymbol{R}^m$ の点 $(x_\alpha,\ \boldsymbol{y}_\alpha)\in U_\alpha\times\boldsymbol{R}^m$ の間に次の関係 $\sim$ を与える：

$$(x_\alpha,\boldsymbol{y}_\alpha)\sim(x_\beta,\boldsymbol{y}_\beta)\Longleftrightarrow x_\alpha=x_\beta\in U_\alpha\cap U_\beta,\ \ \boldsymbol{y}_\beta=f'{}_{\beta\alpha}(\boldsymbol{v})\boldsymbol{y}_\alpha\ \ (x_\alpha=\psi_\alpha(\boldsymbol{v}))$$

商空間

$$TM=\coprod_\alpha U_\alpha\times\boldsymbol{R}^m/\sim$$

は $\{U_\alpha\times\boldsymbol{R}^m,\ \psi_\alpha\times 1\}$ を座標近傍にもつ $2m$-次元微分多様体となる．このとき，座標近傍を C^∞- 同値なものでおきかえても，TM の微分構造は変らないことがわかる．写像

$$p:TM\longrightarrow M\Longleftrightarrow p(x_\alpha,\ \boldsymbol{y}_\alpha)=x_\alpha$$

は C^∞- 写像で，**射影**とよばれる．M の 1 点 x の p による逆像

$$T_xM=p^{-1}(x)$$

は $\boldsymbol{R}^m$ と自然な C^∞-写像 $x\times\boldsymbol{R}^m\to TM$ によって同相であり，x における**接(ベクトル)空間**とよばれる $\boldsymbol{R}$ 上のベクトル空間である．T_xM のベクトルを x における M の**接ベクトル**という．以上を総合して，

$$\tau(M)=(TM,\ p,\ M,\ \boldsymbol{R}^m)$$

を M の**接バンドル**，TM をその**全空間**または**接バンドル空間**という．

例えば，$\boldsymbol{R}^m$ の開集合 U について，$TU=U\times\boldsymbol{R}^m$，

特に，
$$T(GL(n,\ \boldsymbol{F}))=GL(n,\ \boldsymbol{F})\times M(n,\ \boldsymbol{F})$$

微分多様体 M, N の間の C^∞- 写像 $f:M\to N$ の**微分** df が

$$df:TM\longrightarrow TN\Longleftrightarrow df(x,\ \boldsymbol{y})=(f(x),\ (\varphi_\beta{}^{-1}f\psi_\alpha)'(\boldsymbol{v})\boldsymbol{y}),\ \ \psi_\alpha(\boldsymbol{v})=x,\ \boldsymbol{v}\in U_\alpha,$$

で定義される．この定義は α,β のとり方に無関係で，df は C^∞- 写像である．df は $p\circ df=f\circ p$ をみたし，

$$df_x=df\,|\,T_xM:\ T_xM\,(\cong\boldsymbol{R}^m)\longrightarrow T_{f(x)}N\,(\cong\boldsymbol{R}^n)$$

は線型写像である．

(5.3)　(1)　$d1_M=1_{TM}$，$d(g\circ f)=dg\circ df$

　(2)　f：微分同相 $\Longrightarrow df$：微分同相，df_x：同型

定義　微分多様体 M が微分多様体 N の**(正則)部分多様体**

$\Longleftrightarrow M$ は N の部分空間, 射入 $i:M\subset N$ は C^∞- 写像かつ di_x は単射($\forall x\in M$).

定理 5.4　$M\subset N$ とする．M が N の部分多様体$\Longleftrightarrow N$ の座標近傍 $\{U_\alpha, \psi_\alpha\}$, $\psi_\alpha:(\boldsymbol{R}^n\supset)V_\alpha\cong U_\alpha$ で，$M\cap U_\beta\neq\phi$ となる各 β について $\{M\cap U_\beta, \psi_\beta|(\boldsymbol{R}^m\times 0)\cap V_\beta\}$ が M の座標近傍となるようなものがとれる．

［証明］　($\Longleftarrow$)は明らか．

($\Longrightarrow$)まず，N の座標近傍$\{U_\alpha', \varphi_\alpha\}$を考え，各 α について，$U_\alpha=U_\alpha'-(M\cap U_\alpha')$, ψ_α は φ_α' の制限にとる．次に，M の点 $x=\varphi_\alpha(\boldsymbol{v})\in U_\alpha'$, $\boldsymbol{v}\in V_\alpha'$ について，$\boldsymbol{R}^n$ における原点の近傍 V から $\boldsymbol{v}$ の近傍の上への C^∞-同相 h で，$h(\boldsymbol{0})=\boldsymbol{v}$ および $\varphi_\alpha\circ h$ は$(\boldsymbol{R}^m\times\boldsymbol{0})\cap V$を x の Mにおける近傍の上へ同相に写すものを作ることができれば，このような $\psi_\beta=\varphi_\alpha\circ h$ と $U_\beta=\psi_\beta(V)$ で$\{U_\beta\}$が Mを覆うようなものを上の$\{U_\alpha, \psi_\alpha\}$につけ加えると求める N の座標近傍がえられる．

このような h を作るには，結局次を示せばよいことがわかる．

(5.4)′　f が $\boldsymbol{R}^m$ の $\boldsymbol{0}$ の近傍から $\boldsymbol{R}^n$ の $\boldsymbol{0}$ の近傍の中への C^∞-写像で$f(\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0}$ かつ $(df)_0:\boldsymbol{R}^m\to\boldsymbol{R}^n$ が単射であれば，$\boldsymbol{R}^n$ の $\boldsymbol{0}$ の十分小さい近傍の間の C^∞-同相 h でその $\boldsymbol{R}^m\times\boldsymbol{0}$ での制限がf に一致するものが存在する．

実際，$\pi:\boldsymbol{R}^n\to df_0(\boldsymbol{R}^m)$を(直交)射影，$\boldsymbol{R}^{n-m}$ を $df_0(\boldsymbol{R}^m)$の補空間とし，$(\pi\circ f)\times 1: U\times\boldsymbol{R}^{n-m}\to df_0(\boldsymbol{R}^m)\times\boldsymbol{R}^{n-m}$ を考えると，原点での Jacobian が 0 でないから，その近傍で C^∞-同相になる．その逆写像を h とすればよい．　　(終)

Lie 群と 1 助変数部分群

定義　G は Lie 群$\Longleftrightarrow G$ は位相群かつ微分多様体でその積 $\mu: G\times G\to G$ および逆元 $\iota: G\to G$ は C^∞-写像．

$f: G\to G'$ が **Lie 群の準同型**$\Longleftrightarrow f$ は位相群の準同型かつ C^∞-写像．

$f: G\to G'$ が **Lie 群の同型**$\Longleftrightarrow f$ は位相群の同型かつ微分同相．

(5.5)　$\boldsymbol{R}^n$ はベクトルの和について可換な Lie 群である．$GL(n, \boldsymbol{F})$ は Lie 群である．

実際，行列の積および逆は成分の有理式で表わされるから，C^∞-写像である．

定義　G を Lie 群とする．Lie 群の準同型 $s: \boldsymbol{R}\to G$ を Lie 群 G の **1 助変数部分群**，$T_0\boldsymbol{R}=0\times\boldsymbol{R}$ の単位ベクトル $(0, 1)$ について $ds(0, 1)\in T_eG$ を s の**初期ベクトル**という．

s の像は G の部分群であるが，閉部分群とは限らない．

以下で，1 助変数部分群は初期ベクトルで定まることを見よう．そのために，微分方程式論より次の補題を引用する．

補題 5.6　U を $\boldsymbol{R}^m$ における $\boldsymbol{0}$ の近傍，V を $\boldsymbol{R}^n$ における $\boldsymbol{y}_0$ の近傍，$h: V \times U \to \boldsymbol{R}^m$ を C^∞- 写像とする．$\boldsymbol{y} \in V$ と $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}^m$ に関する微分方程式

$$\frac{d}{dt} f(t) = h(\boldsymbol{y}, f(t)), \quad f(0) = \boldsymbol{0}$$

に対して，$\varepsilon > 0$ と $\boldsymbol{y}_0$ の近傍 $V' \subset V$ が存在して，各 $\boldsymbol{y} \in V'$ について，上の微分方程式の解 $f_{\boldsymbol{y}}(t)$ が $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ で一意的に存在し，$f: (-\varepsilon, \varepsilon) \times V' \to \boldsymbol{R}^m$，$f(t, \boldsymbol{y}) = f_{\boldsymbol{y}}(t)$，は C^∞-写像である．

定義　微分多様体 M の上の(接) **ベクトル場** $\boldsymbol{v} \Longleftrightarrow p \circ \boldsymbol{v} = 1_M$ をみたす C^∞- 写像 $\boldsymbol{v}: M \to TM$.

ベクトル場 $\boldsymbol{v}$ は M の各点 x にその点における接ベクトル $\boldsymbol{v}(x)$ を対応させ，その対応が C^∞- 写像となるものである．

補題 5.7　$W \subset \boldsymbol{R}$ を閉区間 $[a, b]$ の近傍，$\boldsymbol{v}$ は微分多様体 M の上のベクトル場，f，$g: W \to M$ を C^∞- 写像とし，$df, dg: TW = W \times \boldsymbol{R} \to TM$ が $t \in [a, b]$ について，$df(t, 1) = \boldsymbol{v}(f(t))$，$dg(t, 1) = \boldsymbol{v}(g(t))$ をみたしているとする．このとき，ある $t_0 \in [a, b]$ について，$f(t_0) = g(t_0)$ であれば，すべての $t \in [a, b]$ について $f(t) = g(t)$ である．

［証明］　$f(t_1) = g(t_1)$，$t_1 \in [a, b]$ とする．$f(t_1)$ を含む座標近傍 $\{U_\alpha, \psi_\alpha\}$ を $\psi_\alpha(0) = f(t_1)$ に選び，TM を $V_\alpha \times \boldsymbol{R}^m$ $(\psi_\alpha: V_\alpha \cong U_\alpha)$ におきかえて考える．また $t_1 = 0$ としてよい．このとき，$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, h(\boldsymbol{x}))$，$\boldsymbol{x} \in V_\alpha$ と表わせば，補題の仮定より，

$$\frac{d}{dt} f(t) = h(f(t)), \quad \frac{d}{dt} g(t) = h(g(t))$$

補題 5.6$(n=0)$を適用すれば，$\varepsilon > 0$ が存在して，$(t_1 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon)$ において $f = g$ であることがわかる．c を $f(t) = g(t)$，$t \in [a, d]$，$d \leq b$，となる d の上限とすれば，上のことから $c = b$ である．下限についても同様．　（終）

Lie 群 G の元 x による左変換 $L_x: G \to G \Longleftrightarrow L_x(g) = xg$ は C^∞- 写像であるから，接バンドル空間の C^∞- 同相 $dL_x: TG \to TG$ を誘導する．

定義　Lie 群 G の上のベクトル場 $\boldsymbol{v}$ が左不変$\Longleftrightarrow$各 $x\in G$ について右の図式は可換：

$$\begin{array}{ccc} TG & \xrightarrow{dL_x} & TG \\ \uparrow{\scriptstyle \boldsymbol{v}} & & \uparrow{\scriptstyle \boldsymbol{v}} \\ G & \xrightarrow{L_x} & G \end{array}$$

補題 5.8　(1)　$\boldsymbol{v}_0\in T_eG$ に対して，$\boldsymbol{v}(x)=dL_x(\boldsymbol{v}_0)$ とおけば，$\boldsymbol{v}:G\to TG$ は左不変ベクトル場であり，T_eG の元と G の左不変ベクトル場はこれによって1対1に対応する．

(2)　$\boldsymbol{v}$ を G の上の左不変ベクトル場，$s:\boldsymbol{R}\to G$ を G の1助変数部分群とする．$\boldsymbol{v}(e)\in T_eG$ が s の初期ベクトル $ds(0,1)$ と一致すれば，すべての $t\in\boldsymbol{R}$ について，$ds(t,1)=\boldsymbol{v}(s(t))$.

［証明］　(1)　前半は(5.3)(1)より明らか．逆対応は $\boldsymbol{v}\to\boldsymbol{v}_0=\boldsymbol{v}(e)$ である．

(2)　$t\in\boldsymbol{R}$ について，右図は可換であるから，これらの接ベクトル空間についても，同様な図式がえられる．(1)より $\boldsymbol{v}(x)=dL_x(ds(0,1))$．特に，

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{R} & \xrightarrow{s} & G \\ \downarrow{\scriptstyle L_t} & & \downarrow{\scriptstyle L_{s(t)}} \\ \boldsymbol{R} & \xrightarrow{s} & G \end{array}$$

$$\boldsymbol{v}(s(t))=dL_{s(t)}(ds(0,\ 1))=dsdL_t(0,\ 1)=ds(t,\ 1)$$ （終）

定理 5.9　Lie 群 G において，1助変数部分群 $s:\boldsymbol{R}\to G$ にその初期ベクトル $ds(0,1)\in T_eG$ を対応させる対応は $\{s\}$ と T_eG の間の全単射を与える．

［証明］　s と s' が同じ初期ベクトル $\boldsymbol{v}_0$ をもてば，補題 5.8 によって，$\boldsymbol{v}_0=\boldsymbol{v}(e)$ となる左不変ベクトル場 $\boldsymbol{v}$ について，$ds(t,\ 1)=\boldsymbol{v}(s(t))$，　$ds'(t,\ 1)=\boldsymbol{v}(s'(t))$．$s'(0)=s(0)=e$ であるから，補題 5.7 より，$s=s'$．よって対応は単射．

初期ベクトル $\boldsymbol{v}_0$，従って左不変ベクトル場 $\boldsymbol{v}$ が与えられたとき，微分方程式 $ds(t,1)=\boldsymbol{v}(s(t))$ を考えると，補題 5.6 を用いて（補題 5.7 の証明と同様に），これは $t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$，$\varepsilon>0$ で初期条件 $ds(0,1)=\boldsymbol{v}(e)=\boldsymbol{v}_0$ の下に解ける．さらに，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}(s(a)s(t))&=dL_{s(a)s(t)}ds(0,1)=dL_{s(a)}dL_{s(t)}ds(0,1)=(dL_{s(a)}ds)dL_t(0,1)\\&=(dsdL_a)(t,1)=ds(a+t,1)=\boldsymbol{v}(s(a+t))\end{aligned}$$

よって，$|a|<\varepsilon/2$，$|t|<\varepsilon/2$ の範囲で，$f(t)=s(a)s(t)$，$g(t)=s(a+t)$ に補題 5.7 を適用して，$s(a)s(t)=s(a+t)$．

一般の $t\in\boldsymbol{R}$ に対しては，$|t/n|<\varepsilon/2$ となる自然数 n をとって，$s(t)=(s(t/n))^n$ とおく．この定義が n のとり方によらず定まり，$s(a+b)=s(a)s(b)$ をみたすこと，および s が C^∞-写像であることは容易．s は1助変数部分群で，そ

の初期ベクトルは，$ds(0,1)=\boldsymbol{v}_0$．よって，対応は全射．　（終）

Lie 群における指数写像と閉部分群

定義　$\boldsymbol{v}_0\in T_eG$ を初期ベクトルとする 1 助変数部分群 s について，

$$\exp: T_eG\longrightarrow G \Longleftrightarrow \exp(\boldsymbol{v}_0)=s(1)$$

を**指数写像**という．

$G=GL(n,\boldsymbol{F})$ の場合は，$T_eG=M(n,\boldsymbol{F})$ である．$A\in M(n,\boldsymbol{F})$ に対して，$s(t)=\exp(tA)$とおけば，tA と $t'A$ は可換であるから $s(t+t')=\exp(tA+t'A)=\exp(tA)\exp(t'A)=s(t)s(t')$．即ち，$s$ は 1 助変数部分群である．よって，上の指数写像は，行列の指数写像の一般化であることがわかる．

定理 5.10　指数写像 exp は $\boldsymbol{0}\in T_eG$ の近傍から，$e\in G$ の近傍の上への微分同相である．

［証明］　e を含む座標近傍 U_α に TG を制限して $U_\alpha\times\boldsymbol{R}^m$ で考える．$T_eG\cong\boldsymbol{R}^m=\exp\boldsymbol{R}^m$ のベクトル $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{v}_0$ に対応する左不変ベクトル場 $\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{y}}$ は $\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{x}, h(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}))$，$h(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})=dL_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y})$，と書ける．このとき，$s(t)=\exp(t\boldsymbol{y})$ は微分方程式 $(d/dt)s(t)=h(\boldsymbol{y},s(t))$ の解である．h は C^∞- 写像であるから，補題 5.6 によって，$\exp(t\boldsymbol{y})$は $\boldsymbol{0}$ の近傍で C^∞- 写像である．exp の微分 $d(\exp)_0: T(T_eG)=T_eG\to T_eG$ は明らかに恒等写像．陰関数の定理を使って，exp は $\boldsymbol{0}$ の近傍で微分同相であることがわかる．　（終）

系 5.11　T_eG が $\boldsymbol{R}$-部分ベクトル空間 $V_1,\cdots,V_k$ の直和であれば，$f(\boldsymbol{v}_1\oplus\cdots\oplus\boldsymbol{v}_k)=\exp\boldsymbol{v}_1\cdots\exp\boldsymbol{v}_k$ （$\boldsymbol{v}_i\in V$） で定義される $f: T_eG\to G$ は $\boldsymbol{0}$ の近傍から e の近傍への微分同相である．

［証明］　f は可微分で df_0 は恒等写像$\Longrightarrow f$ は局所的に微分同相．　（終）

補題 5.12　Hを Lie 群 G の閉部分群，$W=\{\boldsymbol{v}\in T_eG\mid\exp(t\boldsymbol{v})\in H,\ \forall t\in\boldsymbol{R}\}$ とするとき，W は T_eG の部分ベクトル空間であり，$\exp|W: W\to H$ は $\boldsymbol{0}$ の近傍から e の近傍への同相写像である．

［証明］　まず，次を示す．

$$(*)\quad \boldsymbol{0}\neq\boldsymbol{v}_n\in T_eG,\ \exp\boldsymbol{v}_n\in H,\ \lim_n\boldsymbol{v}_n=\boldsymbol{0},\ \lim_n\frac{\boldsymbol{v}_n}{\|\boldsymbol{v}_n\|}=\boldsymbol{v}\Longrightarrow\boldsymbol{v}\in W$$

$\lim_n\|\boldsymbol{v}_n\|=0$，$\|\boldsymbol{v}_n\|\neq0$ であるから，$\lim_n a_n\|\boldsymbol{v}_n\|=t$ となる整数列 $\{a_n\}$ がある．

そのとき，$\exp(t\boldsymbol{v})=\lim_n \exp(a_n\boldsymbol{v}_n)=\lim_n(\exp\boldsymbol{v}_n)^{a_n}$，$(\exp\boldsymbol{v}_n)^{a_n}\in H$，かつ$H$は閉集合であるから，$\exp(t\boldsymbol{v})\in H\Longrightarrow\boldsymbol{v}\in W$.

次に，$\exp: V\cong U$(同相)となる$\boldsymbol{0}, e$のそれぞれの近傍V, Uについて，

(**) $\mu(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\exp^{-1}(\exp\boldsymbol{x}\cdot\exp\boldsymbol{y})(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}\in V,\ \exp\boldsymbol{x}\cdot\exp\boldsymbol{y}\in U)$とおけば，

$$\mu(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+\boldsymbol{o}(\|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{y}\|)$$

を示そう．μはC^∞-写像であるから，$\mu(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})=\boldsymbol{z}+a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{y}+\boldsymbol{o}(\|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{y}\|)$となる$\boldsymbol{z}\in T_eG, a,\ b\in\boldsymbol{R}$がある．$\mu(\boldsymbol{0},\boldsymbol{y})=\boldsymbol{y}\Longrightarrow\boldsymbol{z}=\boldsymbol{0}, b=1$. $\mu(\boldsymbol{x},\boldsymbol{0})=\boldsymbol{x}\Longrightarrow a=1$.

Wが部分ベクトル空間であることを示す. 明らかに, $\boldsymbol{w}\in W, t\in\boldsymbol{R}\Longrightarrow t\boldsymbol{w}\in W$

$\boldsymbol{w}_1,\ \boldsymbol{w}_2\in W,\ \boldsymbol{w}_1+\boldsymbol{w}_2\neq\boldsymbol{0}$とする．$h(t)=\mu(t\boldsymbol{w}_1,\ t\boldsymbol{w}_2)$とおくと，(**)より，$h(t)=t(\boldsymbol{w}_1+\boldsymbol{w}_2)+o(t)$. ここで，十分大きい$n$について，$\boldsymbol{v}_n=h(1/n)$，$\boldsymbol{w}=\boldsymbol{w}_1+\boldsymbol{w}_2$，$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{w}/\|\boldsymbol{w}\|$とおけば(*)の条件をみたしていることがわかるから，$\boldsymbol{w}_1+\boldsymbol{w}_2\in W$. 以上で$W$が部分ベクトル空間であることが証明された.

$T_eG=W^\perp\oplus W$と分解し，$f(\boldsymbol{w}',\ \boldsymbol{w})=\exp\boldsymbol{w}'\cdot\exp\boldsymbol{w}\ (\boldsymbol{w}'\in W^\perp,\ \boldsymbol{w}\in W)$とおけば，系5.11により，$f: T_eG\to G$は$\boldsymbol{0}$の近傍$V'$から$e$の近傍$U'$の上への微分同相$\Longrightarrow f$は$V'\cap f^{-1}(U'\cap H)$から$U'\cap H$の上への同相.

明らかに$V'\cap W\subset V'\cap f^{-1}(U'\cap H)$. $\boldsymbol{0}$の$V'\cap f^{-1}(U'\cap H)$における近傍で，$V'\cap W$に含まれるものがあれば，補題の後半が示されるから，そうでないと仮定して矛盾を出せばよい．この仮定から，点列$\{(\boldsymbol{w}_n',\ \boldsymbol{w}_n)\}$が存在して，$f(\boldsymbol{w}_n',\boldsymbol{w}_n)\in H,\ \lim_n f(\boldsymbol{w}_n',\ \boldsymbol{w}_n)=e$かつ$\boldsymbol{w}_n'\neq\boldsymbol{0}$. $\exp\boldsymbol{w}_n,\ f(\boldsymbol{w}_n,\ \boldsymbol{w}_n')\in H\Longrightarrow\exp\boldsymbol{w}_n'\in H$, $W^\perp$の単位球$S(W^\perp)$はコンパクトであるから，$\boldsymbol{w}_n'$をその部分列でとり直して，$\lim_n\boldsymbol{w}_n'/\|\boldsymbol{w}_n'\|=\boldsymbol{w}'\in S(W^\perp)$. (*)を用いると$\boldsymbol{w}'\in W\Longrightarrow\boldsymbol{w}'\in W^\perp\cup W=\{\boldsymbol{0}\}$，故に，$\|\boldsymbol{w}'\|=1$かつ$\boldsymbol{w}'=\boldsymbol{0}$, これは矛盾である. (終)

定理 5.13 Lie群Gの閉部分群HはGの部分多様体としての微分構造によって，Hそれ自身Lie群であり，$T_eH=\{\boldsymbol{v}\in T_eG\mid\exp(t\boldsymbol{v})\in H,\ \forall t\in\boldsymbol{R}\}$.

［証明］ Lie群Gにおいて，その座標近傍として，eの近傍Uと$\exp: V\cong U$(微分同相)をもとに，$\{L_gU,\ L_g\circ\exp\}_{g\in G}$またはその一部よりなるものをとることができる．補題5.12のWをとり，$V\cap W$とその上の$\exp$をもとにHの座標近傍を定めるとき，Hは微分多様体となり，Gの部分多様体となることも明らかであろう．そのとき，Hにおける群作用はC^∞-写像である．また$T_eH=W$. (終)

系 5.14 $GL(n, \boldsymbol{F})$ の閉部分群，特に古典群，は Lie 群である．

定義 $GL(n, \boldsymbol{F})$ の閉部分群に同型な Lie 群を**線型 Lie 群**という．

Lie 群の準同型と等質空間

補題 5.15 実数の加法群 $\boldsymbol{R}$ から Lie 群 G への連続な準同型 $f : \boldsymbol{R} \to G$ は G の 1 助変数部分群である．即ち，連続性から微分可能性がえられる．

［証明］ $T_eG = \boldsymbol{R}^m$ とみなし，$\boldsymbol{0}$ の 2ε 近傍 $(\varepsilon>0)$ $V_{2\varepsilon}$ において，exp は G における e の近傍 $U_{2\varepsilon}$ の上への同相であるとする．$U_\varepsilon = \exp V_\varepsilon$ の元 g に対して，$h^2 = g$ となる $h \in U_\varepsilon$ が一意的に定まることは容易にわかる．

$f[-a, a] \subset U_\varepsilon$ となる $a>0$ を選び，$f(a) = \exp \boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v} \in V_\varepsilon$ とする．上のことから，$f(a/2)^2 = f(a) = \exp \boldsymbol{v} = \exp(\boldsymbol{v}/2)^2 \Longrightarrow f(a/2) = \exp(\boldsymbol{v}/2)$. これを繰り返して，$f(a/2^k) = \exp(\boldsymbol{v}/2^k) \Longrightarrow$ 有理数 $r = n/2^k \in [-1, 1]$ について $f(ra) = \exp(r\boldsymbol{v})$. このような r は $[-1, 1]$ で稠密であるから，$t \in [-1, 1]$ について $f(ta) = \exp(t\boldsymbol{v})$. 従って，すべての $t \in \boldsymbol{R}$ について $f(ta) = \exp(t\boldsymbol{v})$. 即ち，$f$ は $\boldsymbol{v}$ を初期ベクトルとする 1 助変数部分群である． （終）

定理 5.16 G, G' を Lie 群，$f : G \to G'$ を位相群としての準同型とするとき，f は Lie 群の準同型である．

［証明］ 単位元の近傍で C^∞- 写像であることをいえば十分である．T_eG の $\boldsymbol{R}$- 基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_m\}$ をとり，$f_i : \boldsymbol{R} \to G' \Longleftrightarrow f_i(t) = f(\exp t\boldsymbol{v}_i)$ とおけば，f_i は連続な準同型である．補題 5.15 により，$f_i(t) = \exp(t\boldsymbol{v}_i')$ となる $\boldsymbol{v}_i' \in T_eG'$ がある．

$h : \boldsymbol{R}^m \to G$, $h' : \boldsymbol{R}^m \to G'$ を，$h(t_1, \cdots, t_m) = \exp t_1\boldsymbol{v}_1 \cdots \exp t_m\boldsymbol{v}_m$, $h'(t_1, \cdots, t_m) = \exp t_1\boldsymbol{v}_1' \cdots \exp t_m\boldsymbol{v}_m'$ で定義すれば，これらは C^∞- 写像である．さらに，系 5.11 により，h は $\boldsymbol{0}$ の近傍で微分同相である．f は準同型であるから，

$$f(h(t_1, \cdots, t_m)) = f_1(t_1) \cdots f_m(t_m) = h'(t_1, \cdots, t_m)$$

よって，$f = h' \circ h^{-1}$ は $\boldsymbol{0}$ の近傍で C^∞- 写像である． （終）

定理 5.17 G を Lie 群，H をその閉部分群とするとき，等質空間 G/H は次の性質をみたす微分構造をもった微分多様体となる．

(1) 射影 $\pi : G \longrightarrow G/H$ は C^∞- 写像，

(2) G の作用 $G \times G/H \longrightarrow G/H$ は C^∞- 写像，

(3) G/H の各点に対して，その近傍 U と C^∞- 写像 $s : U \longrightarrow G$ が存在し

て，$\pi\circ s=1_U$ をみたす(これを，射影 π は**局所切断**をもつという)．

［証明］　補題 5.12 の証明によって，$f: T_eG=W^{\perp}\oplus W\longrightarrow G\Longleftrightarrow f(\boldsymbol{w}', \boldsymbol{w})=\exp\boldsymbol{w}'\exp\boldsymbol{w}$ において，$\mathbf{0}$ の開近傍 V'，V を十分小さくとれば，f は $V'\times V$ から e の近傍 $U'\subset G$ の上への微分同相かつ $f(\mathbf{0}\times V)=U'\cap H$ となる．

さらに，V_0'，V_0 を小さくとって，$U_0'=f(V_0'\times V_0)$について，$U_0'^{-1}\cdot U_0'\subset U'$ にとれば，$(\boldsymbol{w}', \boldsymbol{w})$，$(\boldsymbol{w}_1', \boldsymbol{w}_1)\in V_0'\times V_0$ について，$\pi f(\boldsymbol{w}', \boldsymbol{w})=\pi f(\boldsymbol{w}_1', \boldsymbol{w}_1)\Longrightarrow\exp\boldsymbol{w}'\exp\boldsymbol{w}=\exp\boldsymbol{w}_1'\exp\boldsymbol{w}_1\cdot h\ (h\in H)\Longrightarrow\exp\boldsymbol{w}_1\cdot h\in U'\cap H\Longrightarrow\exp\boldsymbol{w}_1\cdot h=\exp\boldsymbol{w}_2\ (\boldsymbol{w}_2\in V)$．故に $f(\boldsymbol{w}', \boldsymbol{w})=f(\boldsymbol{w}'_1, \boldsymbol{w}_2)$ となり $\boldsymbol{w}'=\boldsymbol{w}_1'$．

従って，$\boldsymbol{w}\in V_0$ に無関係にきまる次の写像は全単射：

$$\psi: V_0'\xrightarrow{\times w}V_0'\times V_0\xrightarrow{f}U_0'\xrightarrow{\pi}\pi(U_0')$$

π は開写像であるから，$U_0=\pi(U_0')$ は $\pi(e)$の開近傍．V_0' が局所コンパクトであることを使えば ψ は同相であることがわかる．

G/H の近傍系として，$\{L_gU_0, L_g\circ\psi\}_{g\in G}$ をとる．L_gU_0 から $L_{xg}U_0$ への座標変換は $L_x(x\in U')$で与えられるから，それは次の合成(の一部への制限)である．

$$V_0'\xrightarrow{\times\mathbf{0}}V_0'\times V_0\xrightarrow{f}U_0'\xrightarrow{L_x}U_0'\xrightarrow{f^{-1}}V_0'\times V_0\xrightarrow{\text{proj}}V_0'$$

従って，座標変換は C^∞- 写像で，G/H は微分多様体である．性質(1), (2), (3)は容易に確かめられる．ただし(3)においては，$U=L_gU_0$ に対して，

$$s: L_gU_0\xrightarrow{L_g^{-1}}U_0\xrightarrow{\psi^{-1}}V_0'\xrightarrow{\times\mathbf{0}}V_0'\times V_0\xrightarrow{f}U_0'\xrightarrow{L_g}L_gU_0'\subset G$$

を考えればよい．　(終)

系 5.18　G を Lie 群，H, K をその閉部分群で $H\supset K$ とするとき，射影 $\pi: G/K\to G/H$ は C^∞- 写像で，局所切断をもつ．

［証明］　$W=T_eH$ をさらに $W=W'\oplus T_eK$ と分解して考えればよい．局所切断は $G\to G/H$ の局所切断よりえられる．　(終)

局所切断の存在は，次章のファイバーバンドルの理論に有効に使われる．

第2章　被覆空間とファイバーバンドル

この章は，主として位相幾何学からの諸事実の紹介である．§1では基本群，それに関連して（普遍）被覆空間および被覆変換群について述べる．§2はファイバーバンドルの基本的性質を紹介する．詳細については例えば，Steenrod [13]を参考にしてほしい．ホモトピー群の定義および諸性質，さらに，ファイバーバンドルの一般化であるファイバー空間については§3で考察する．spinor群を定義する為に，§4で位相群の局所同型，被覆群，特に古典群の被覆群の性質を述べ，さらに§5においてLie群とLie環の関係を述べたのち，低次のspinor群，Spin(n)，$n=3, 4, 5, 6$，と古典群との関係を記述する．§6ではn-普遍バンドルの概念を導入し，さらに，分類空間の存在性を示したのち，いわゆる分類定理，即ち，ある空間X上のファイバーバンドルの同値類はXから分類空間への写像のホモトピー類と1対1に対応する，を証明する．

§1　基本群と被覆空間

ホモトピー類と基本群

位相空間Xの部分空間$A_1, \cdots, A_n$，位相空間Yの部分空間$B_1, \cdots, B_n$，について，(連続)写像$f: X \to Y$で$f(A_i) \subset B_i$をみたすものを

$$f: (X, A_1, \cdots, A_n) \longrightarrow (Y, B_1, \cdots, B_n)$$

で表わす．

定義　2つの写像$f, g: (X, A_1, \cdots, A_n) \to (Y, B_1, \cdots, B_n)$が**ホモトープ**

$\Longleftrightarrow$写像$H: (X \times I, A_1 \times I, \cdots, A_n \times I) \to (Y, B_1, \cdots, B_n)$が存在して

$$H(x, 0)=f(x), \quad H(x, 1)=g(x) \quad (x \in X)$$

このようなHを**ホモトピー**という．また，fとgがホモトープなことを

$$f \simeq g : (X, A_1, \cdots, A_n) \to (Y, B_1, \cdots, B_n)$$

で表示する．次は容易に確かめられる．

(1.1) (1) ホモトープ $\simeq$ は同値関係である．

(2) ホモトープは写像の合成で保たれる：$f \simeq g : (X, A_1, \cdots, A_n) \to (Y, B_1, \cdots, B_n)$, $f' \simeq g' : (Y, B_1, \cdots, B_n) \to (Z, C_1, \cdots, C_n)$ ならば，$f' \circ f \simeq g' \circ g : (X, A_1, \cdots, A_n) \to (Z, C_1, \cdots, C_n)$.

定義 $f : (X, A_1, \cdots, A_n) \to (Y, B_1, \cdots, B_n)$ とホモトープな写像全体を f の**ホモトピー類**といい，$[f]$ で表わす．

$(X, A_1, \cdots, A_n)$ と $(Y, B_1, \cdots, B_n)$ が**ホモトピー同値**$\Longleftrightarrow f : (X, A_1, \cdots, A_n) \to (Y, B_1, \cdots, B_n)$ と $g : (Y, B_1, \cdots, B_n) \to (X, A_1, \cdots, A_n)$ があって $g \circ f \simeq 1 : (X, A_1, \cdots, A_n) \to (X, A_1, \cdots, A_n)$ および $f \circ g \simeq 1 : (Y, B_1, \cdots, B_n) \to (Y, B_1, \cdots, B_n)$ をみたす．

ホモトピー同値な空間の系は，**同じホモトピー型**をもつともいわれる．特に，1点と同じホモトピー型をもつ空間は**可縮**であるといわれる．

同じホモトピー型をもつ空間(系)ではホモトピー類が1対1に対応し，後に述べる基本群，ホモトピー群，(コ)ホモロジー群，K-群等を考える上では同値なものとみなされる．

ホモトピー $H : X \times I \to Y$ に対して，$h_t(x) = H(x, t)$ で与えられる

$$h_t : X \longrightarrow Y \quad (0 \leq t \leq 1)$$

をもホモトピーということがある．このとき，$h_0 \simeq h_1 : X \to Y$ である．

ここでは，道のホモトピー類について考える．

記号 $\pi_1(X, x_0, x_1) = \{w : (I, 0, 1) \longrightarrow (X, x_0, x_1)\}/\simeq$

$= \{X$ における x_0 を始点，x_1 を終点とする道のホモトピー類 $[w]\}$

$\pi_1(X, x_0) = \pi_1(X, x_0, x_0) = \{w : (I, \partial I) \longrightarrow (X, x_0)\}/\simeq$

$= \{x_0$ を基点とする X における**閉道**のホモトピー類$[w]\}$

定義 2つの道 $w, w' : I \to X$ が $w(1) = w'(0)$ をみたすとき，**道の積**を

$$w * w' : I \longrightarrow X \Longleftrightarrow (w * w')(t) = \begin{cases} w(2t) & (0 \leq t \leq 1/2) \\ w'(2t-1) & (1/2 \leq t \leq 1) \end{cases}$$

で定義する．$w : I \to X$ の**逆の道**を

$$\overline{w}: I \longrightarrow X \Longleftrightarrow \overline{w}(t) = w(1-t)$$

で定義する．$x \in X$ における**定値道**を次のように定義する：

$$0_x : I \longrightarrow X \Longleftrightarrow 0_x(t) = x$$

(1.2)　以下は道の積が定義できている場合に成り立つ：

(1)　$w_0 \simeq w_1$, $w_0' \simeq w_1' \Longrightarrow w_0 * w_0' \simeq w_1 * w_1'$. 従って，道のホモトピー類の間の積 $[w][w'] = [w * w']$ が定義される．

(2)　$([w][w'])[w''] = [w]([w'][w''])$（これを $[w][w'][w'']$ と書く．）

(3)　$[w][\overline{w}] = [0_x]$, $[\overline{w}][w] = [0_y]$ $(w(0) = x,\ w(1) = y)$

(4)　$[0_x][w] = [w] = [w][0_y]$ $(w(0) = x,\ w(1) = y)$

(5)　$w \simeq w' : (I, 0, 1) \longrightarrow (X, x_0, x_1)$, $f \simeq g : (X, x_0, x_1) \longrightarrow (Y, y_0, y_1)$ $\Longrightarrow f \circ w \simeq g \circ w' : (I, 0, 1) \longrightarrow (Y, y_0, y_1)$. 従って，$f_*[w] = [f \circ w]$ と書くとき，

$$f_* : \pi_1(X, x_0, x_1) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0, y_1)$$

が定義されて，$f \simeq g \Longrightarrow f_* = g_*$. $1_{X*} = 1$.

(6)　$f_*([w][w']) = f_*[w] f_*[w']$, $(f' \circ f)_* = f'_* \circ f_*$.

(1.3)　(1)　$\pi_1(X, x_0)$ は閉道のホモトピー類の積に関して群をなす．

(2)　$f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ に対して，$f_* : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0)$ は準同型で，$f \simeq g \Longrightarrow f_* = g_*$, $(f' \circ f)_* = f'_* \circ f_*$, $1_{X*} = 1$.

(3)　x_0 と x_1 を結ぶ道があれば，$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1)$（同型）．

定義　$\pi_1(X, x_0)$ を X の x_0 に関する**基本群**という．

(1.4)　$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$（同型）

この同型対応は，X, Y への射影 p_X, p_Y を用いて $\alpha \to (p_{X*}\alpha, p_{Y*}\alpha)$ で，逆対応は射入 $i_X = (\ \ , y_0)$, $i_Y = (x_0, \ )$ を用いて $(\alpha, \beta) \to (i_{X*}\alpha)(i_{Y*}\beta)$ で与えられる．

被覆空間

復習　X は**局所弧状連結**$\Longleftrightarrow$ X の各点 x の任意の近傍 U に対して，U に含まれる弧状連結な x の近傍が存在する．

定義　X は **1-連結**$\Longleftrightarrow$ X は弧状連結$(\pi_0(X) = 0)$かつ**単連結**$(\Leftrightarrow \pi_1(X, x_0) = 0)$.

定義　$(\tilde{X}, p, X)$ は**被覆空間**$\Longleftrightarrow$次の(1), (2)をみたす：

(1)　$\tilde{X}$ および X は弧状連結かつ局所弧状連結，

(2)　$p:\tilde{X}\to X$ は連続な全射であって，X の各点 x に対して，弧状連結な x の近傍 U があって，$p^{-1}(U)$ の各弧状成分 U_α は $p^{-1}(U)$ の開集合で，$p|U_\alpha:U_\alpha\cong U$（同相）．（このような U を**基本近傍**という．）

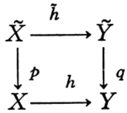
X を**底空間**，p を**射影**または**被覆写像**，$\tilde{X}$ を**全空間**または X の**被覆空間**，$p^{-1}(x)$ を X の点 x の上の**ファイバー**という．

定義から，$p^{-1}(x)$ は疎な位相をもち，U が x を含む基本近傍であれば，

$$U\times p^{-1}(x)\cong p^{-1}(U)\quad（同相）$$

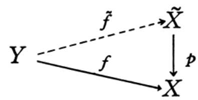
であることがわかる．

定義　2つの被覆空間 $(\tilde{X},\ p,\ X)$, $(\tilde{Y},\ q,\ Y)$ が**同値** $\Longleftrightarrow$ 右の図式が可換であるような，同相写像 $\tilde{h}$, h がある．



同値な被覆空間は，しばしば同一視される．

定義　被覆空間 $(\tilde{X},\ p,\ X)$ と $f:Y\to X$ に対して，$p\circ\tilde{f}=f$ をみたす $\tilde{f}:Y\to\tilde{X}$ を f の**リフト**という．



補題 1.5　$(\tilde{X},\ p,\ X)$ を被覆空間とする．X における道 $w:I\to X$ と $\tilde{X}$ の1点 $\tilde{x}$ で $p(\tilde{x})=w(0)$ をみたすものに対して，$\tilde{w}(0)=\tilde{x}$ をみたす w のリフト $\tilde{w}$ が存在して一意的．また，$w\simeq w_1$ ならばそれらのリフト $\tilde{w}$, $\tilde{w}_1$ について，$\tilde{w}(0)=\tilde{w}_1(0)\Longrightarrow\tilde{w}(1)=\tilde{w}_1(1)$ かつ $\tilde{w}\simeq\tilde{w}_1$．

［証明］　$w(I)$ が1つの基本近傍に入っているとき補題は明らかである．一般の場合は，$w(I)$ はコンパクトであるから有限個の基本近傍で覆われる．このことから前半は容易に示される．後半は，$w\simeq w_1$ を示すホモトピー $H:I\times I\to X$ において，I を十分小さい有限個の閉区間 I_i に分けるとき，$H(I_i\times I_j)$ が1つの基本近傍に入るようにとれる．このことから，H のリフト $\tilde{H}:I\times I\to\tilde{X}$ で，$\tilde{H}(0\times I)=\tilde{w}(0)=\tilde{w}_1(0)$ をみたすものの存在がわかる．$\tilde{H}(1\times I)\subset p^{-1}(x_1)$, $x_1=w(1)=w_1(1)$，かつ $p^{-1}(x_1)$ は疎な位相をもつから，$\tilde{H}(1\times I)$ は定点 $\tilde{x}_1$．前半によって，$\tilde{H}|I\times 0=\tilde{w}$, $\tilde{H}|I\times 1=\tilde{w}_1$ であるから，$\tilde{w}(1)=\tilde{w}_1(1)=\tilde{x}_1$ かつ $\tilde{w}\simeq\tilde{w}_1$．

（終）

定理 1.6　$(\tilde{X},\ p,\ X)$ を被覆空間とする．

(1)　Xの任意の2点x_0，x_1について，全単射$p^{-1}(x_0)\cong p^{-1}(x_1)$がある．

(2)　$p_*:\pi_1(\tilde{X},\ \tilde{x}_0)\to\pi_1(X,\ x_0)$ は単射．

(3)　全単射$\psi:\pi_1(X,\ x_0)/\mathrm{Im}\ p_*=\{(\mathrm{Im}\ p_*)\alpha\,|\,\alpha\in\pi_1\}\cong p^{-1}(x_0)$ がある．

［証明］　(1), (2)は補題1.5から明らか．

(3)　$\tilde{x}_0\in p^{-1}(x_0)$を固定し，$[w]\in\pi_1(X,\ x_0)$に対して，$\tilde{w}(0)=\tilde{x}_0$をみたす$w$のリフト$\tilde{w}$を考え$\tilde{\psi}[w]=\tilde{w}(1)$と置く．補題1.5により，対応$\tilde{\psi}:\pi_1(X, x_0)\to p^{-1}(x_0)$が定まる．$\tilde{x}_0$と$p^{-1}(x_0)$の任意の点を結ぶ道があるから，$\tilde{\psi}$は全射．$[v]\in\pi_1(\tilde{X},\ \tilde{x}_0)$について，$\tilde{\psi}(p_*[v][w])=\tilde{\psi}[w]$は明らか．逆に$\tilde{\psi}[w]=\tilde{\psi}[w_1]$ならば，$v=w*\overline{w}_1$は閉道で$[w][w_1]^{-1}=p_*[v]$．故に全単射$\psi$をうる．(終)

定義　$p^{-1}(x_0)$の個数(濃度)を**被覆度**(**数**)という．

次の補題はリフトの存在に関して基本的なものである．

補題 1.7　$(\tilde{X},\ p,\ X)$は被覆空間, Yは弧状連結，$f:(Y,\ y_0)\to(X,\ x_0)$とする．

(1)　$\tilde{f}$, $\tilde{g}:Y\to\tilde{X}$をfのリフトとするとき，$\tilde{f}(y_0)=\tilde{g}(y_0)\Longrightarrow\tilde{f}=\tilde{g}$.

(2)　Yは局所弧状連結，かつ $f_*(\pi_1(Y,\ y_0))\subset p_*(\pi_1(\tilde{X},\ \tilde{x}))$, $\tilde{x}\in p^{-1}(x_0)\Longrightarrow$ $\tilde{f}(y_0)=\tilde{x}$をみたすfのリフト$\tilde{f}:Y\to\tilde{X}$が存在して一意的.

この仮定は，特にYが局所弧状連結かつ1連結のときは，任意の$\tilde{x}\in p^{-1}(x_0)$についてみたされている．

［証明］　(1)　yをYの任意の点とする．y_0とyを結ぶ道wをとると，$\tilde{f}\circ w$, $\tilde{g}\circ w$はともに$f\circ w$のリフトで，$(\tilde{f}\circ w)(0)=\tilde{f}(y_0)=\tilde{g}(y_0)=(\tilde{g}\circ w)(0)$．補題1.5により，$\tilde{f}(y)=(\tilde{f}\circ w)(1)=(\tilde{g}\circ w)(1)=\tilde{g}(y)$.

(2)　上のyとwに対して，$\tilde{v}:I\to\tilde{X}$を$\tilde{v}(0)=\tilde{x}_0$みたす$f\circ w$のリフトとし，$\tilde{f}(y)=\tilde{v}(1)$と置く．前定理の証明と同様にして，条件$\mathrm{Im}\,f_*\subset\mathrm{Im}\,p_*$から$\tilde{f}(y)$が$\tilde{v}$の選び方に無関係で，対応$\tilde{f}:Y\to\tilde{X}$が定まることがわかる．明らかに，$p\circ\tilde{f}=f$, $\tilde{f}(y_0)=\tilde{x}_0$であるから，$\tilde{f}$の連続性を示せばよい．$\tilde{f}(y)$の近傍$\tilde{U}$を，基本近傍$U$の逆像$p^{-1}(U)$の弧状成分にとる．仮定と$f$の連続性から，$y$の弧状連結近傍$V$があって，$f(V)\subset U\Longrightarrow\tilde{f}(V)\subset p^{-1}(U)$．$\tilde{f}(V)$は弧状連結かつ$\tilde{f}(V)\cap\tilde{U}\ni\tilde{f}(y)\Longrightarrow\tilde{f}(V)\subset\tilde{U}$．よって，$\tilde{f}$は連続．(終)

被覆変換群

定義　$p\circ\tilde{f}=p$ をみたす同相$\tilde{f}:\tilde{X}\to\tilde{X}$を$(\tilde{X},\ p,\ X)$の**被覆変換**という．

被覆変換全体のなす，合成を積とする，群を $(\tilde{X}, p, X)$ の**被覆変換群**という．

補題 1.8 (1) $\tilde{f}: \tilde{X}\to\tilde{X}$ が $p\circ\tilde{f}=p$ をみたせば，$\tilde{f}$ は被覆変換である．

(2) $p^{-1}(x_0)$ の2点 $\tilde{x}_0$, $\tilde{x}_1$ について $\tilde{f}(\tilde{x}_0)=\tilde{x}_1$ となる被覆変換 $\tilde{f}$ がある$\Longleftrightarrow$ $\tilde{x}_0$ と $\tilde{x}_1$ を結ぶ道 w について，$[p\circ w]$ が $H=p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ の正規化群 $N(H)=\{\alpha\in\pi_1(X, x_0)\,|\,\alpha H=H\alpha\}$ に属する．

［証明］ $\tilde{f}(\tilde{x}_0)=\tilde{x}_1$ をみたす $p: \tilde{X}\to X$ のリフト $\tilde{f}: \tilde{X}\to\tilde{X}$ があったとする．$p=p\circ\tilde{f}$ であるから，任意の $[a]\in\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ について，$p_*[a]=p_*\tilde{f}_*[a]$. $[\overline{w}]f^*[a][w]\in\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ であるから，$\alpha=[p\circ w]\in\pi_1(X, x_0)$ とおくとき，$\alpha^{-1}(p_*[a])\alpha=p_*\{[\overline{w}]\tilde{f}_*[a][w]\}\in H$. $[a]$ は任意$\Longrightarrow\alpha^{-1}H\alpha\subset H\Longrightarrow\alpha\in N(H)$.

逆に，$\alpha=[p\circ w]\in N(H)$ とすると，$\alpha^{-1}=[p\circ\overline{w}]\in N(H)\Longrightarrow$任意の $[a]\in\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ について，$\alpha(p_*[a])\alpha^{-1}=p_*[b]$ となる $[b]\in\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ が存在する．故に，$p_*[a]=\alpha^{-1}(p_*[b])\alpha=p_*\{[\overline{w}][b][w]\}\in p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)\Longrightarrow p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))\subset p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1))$. 補題 1.7(2)を $f=p$, $\tilde{x}=\tilde{x}_1$ に適用して，$\tilde{f}(\tilde{x}_0)=\tilde{x}_1$ をみたす p のリフト $\tilde{f}$ の存在がえられる．

いま，$p=p\circ\tilde{f}$，即ち，$\tilde{f}$ が p のリフトであれば，上の議論の前半により，$\tilde{x}_0\in p^{-1}(x_0)$ と $\bar{x}_1=f(\tilde{x}_0)$ を結ぶ道 w について，$[p\circ w]\in N(H)\Longrightarrow[p\circ\overline{w}]=[p\circ w]^{-1}\in N(H)$. $\overline{w}$ は $\tilde{x}_1$ と $\tilde{x}_0$ を結ぶ道であるから，後半の議論により，$\tilde{g}(\tilde{x}_1)=\tilde{x}_0$ をみたす p のリフト $\tilde{g}$ がある．$\tilde{g}\circ\tilde{f}$ および $1_{\tilde{X}}$ はともに p のリフトで，$(\tilde{g}\circ\tilde{f})(\tilde{x}_0)=\tilde{x}_0=1_{\tilde{X}}(\tilde{x}_0)$ であるから，補題 1.6(1)より，$\tilde{g}\circ\tilde{f}=1_{\tilde{X}}$. 同様に $\tilde{f}\circ\tilde{g}=1_{\tilde{X}}$. よって，$\tilde{f}$ は同相，即ち，$\tilde{f}$ は被覆変換で，(1)が証明された．(1)を認めると，上の議論は(2)の証明になっている． (終)

定理 1.9 被覆変換 $\tilde{f}$ に，補題 1.8(2)の $[p\circ w]$ の $N(H)/H$ における類を対応させることによって，$(\tilde{X}, p, X)$ の被覆変換群は商群 $N(H)/H$ と同型である．

［証明］ 定理 1.6 (3)の全単射 ψ による $N(H)/H$ の像 $\psi(N(H)/H)\subset p^{-1}(x_0)$ を考える．ψ は $[p\circ w]$ の類に $w(1)$を対応させる．補題 1.8 (2)は，被覆変換 $\tilde{f}$ に $\tilde{f}(\tilde{x}_0)=\tilde{x}_1=w(1)$ を対応させる対応は $\psi(N(H)/H)$ への全射であることを示している．また補題 1.8 (1)はこの対応が単射であることを示している．よって，この対応が準同型であることを示せばよい．

被覆変換 $\tilde{f}$, $\tilde{g}$ について，$\tilde{x}_0$ と $\tilde{f}(\tilde{x}_0)$, $\tilde{g}(\tilde{x}_0)$ とを結ぶ道をそれぞれ，w_1, w_2

とする．このとき，$w_1 * (\tilde{f} \circ w_2)$ は $\tilde{x}_0$ と $(\tilde{f} \circ \tilde{g})(\tilde{x}_0)$ を結ぶ道である．$[p \circ (w_1 * (\tilde{f} \circ w_2))] = [p \circ w_1][p \circ \tilde{f} \circ w_2] = [p \circ w_1][p \circ w_2]$ であるから，$\tilde{f} \circ \tilde{g}$ に対応する $N(H)/H$ の元は $\tilde{f}$，$\tilde{g}$ に対応する元の積である．よって，我々の対応は準同型であることがわかった．　（終）

定義　$p^{-1}(x_0)$ の任意の 2 点 $\tilde{x}_1$，$\tilde{x}_2$ に対して，$\tilde{f}(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$ となる被覆変換の存在するような被覆空間 $(\tilde{X}, p, X)$ を**正則被覆空間**という．

定理 1.10　(1)　被覆空間 $(\tilde{X}, p, X)$ が正則 $\Longleftrightarrow p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ は $\pi_1(X, x_0)$ の正規部分群．

(2)　$(\tilde{X}, p, X)$ を正則被覆空間とするとき，商群 $G = \pi_1(X, x_0)/p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ は $\tilde{X}$ に不動点なしに ($g\tilde{x} = \tilde{x}$ なる $\tilde{x}$ があれば $g = e$) 作用して，射影 $\pi: \tilde{X} \to \tilde{X}/G$ について，$(\tilde{X}, p, X)$ と $(\tilde{X}, \pi, \tilde{X}/G)$ は同値である．

［証明］　(1) は補題 1.8 (2) より自明．(2) も明らかであろう．　（終）

定理 1.11　弧状連結，局所弧状連結な位相空間 $\tilde{X}$ に，疎な位相をもつ G が作用して，x の各点は次の条件をみたす近傍 V をもつとする：

$$V \cap L_g(V) \neq \phi \Longrightarrow g = e$$

このとき，射影 $p: \tilde{X} \to \tilde{X}/G$ について，$(\tilde{X}, p, \tilde{X}/G)$ は正則被覆空間で，その被覆変換群は G と同型である．

［証明］　V として弧状連結なものをとれる．そのとき，$p(x)$ を含む基本近傍として $p(V)$ がとれて，$(\tilde{X}, p, \tilde{X}/G)$ が被覆空間となることは容易にわかる．正則であることや被覆変換群が G と同型であることは明らかである．　（終）

普遍被覆空間

定義　$\tilde{X}$ が 1- 連結である被覆空間 $(\tilde{X}, p, X)$ を**普遍被覆空間**という．

定理 1.12　$(\tilde{X}, p, X)$ を普遍被覆空間，$G = \pi_1(X, x_0)$ とする．

(1)　$(\tilde{X}, p, X)$ は正則被覆空間である．従って，G は $\tilde{X}$ に不動点なしに作用して，$(\tilde{X}, p, X)$ と $(\tilde{X}, \pi, \tilde{X}/G)$ は同値である．

(2)　任意の被覆空間 $(\tilde{X}', p', X)$ に対して，普遍被覆空間 $(\tilde{X}, p'', \tilde{X}')$ が存在して，$p = p' \circ p''$．実際，$H = p'_*(\pi_1(\tilde{X}', \tilde{x}_0'))$ について，$\tilde{X}' \cong \tilde{X}/H$.

(3)　X を底空間とする普遍被覆空間は同値の意味で一意的である．

［証明］　(1) は正則の定義と定理 1.10 より明らか．

(2)　補題 1.7(2)を被覆空間 $(\tilde{X}', p', X)$ と写像 $p:\tilde{X}\to X$ に適用して，$p=p'\circ p''$ をみたす $p'':\tilde{X}\to\tilde{X}'$ の存在がえられる．$p''(\tilde{x}_0)=\tilde{x}_0'$ のとき，任意の $\tilde{x}'\in\tilde{X}'$ に対して，$\tilde{x}_0'$ と $\tilde{x}'$ を結ぶ道 $\tilde{w}'$ を考え，$p'\circ\tilde{w}'$ の $(\tilde{X}, p, X)$ に関するリフト $\tilde{w}$ で $\tilde{w}(0)=\tilde{x}_0$ をみたすものをとる．補題 1.7(1)より，$p''\circ\tilde{w}=\tilde{w}'\Longrightarrow p''(\tilde{w}(1))=\tilde{x}'$．従って p'' は全射である．$(\tilde{X}', p', X)$ と $(\tilde{X}, p, X)$ に共通な基本近傍 U をとり，$p'^{-1}(U)$ の各成分を U_β' とするとき，$(\tilde{X}, p'', \tilde{X}')$は U_β' を基本近傍とする被覆空間となることは，容易に確かめられる．$(\tilde{X}, p'', \tilde{X}')$ における被覆変換 $\tilde{f}$ は $(\tilde{X}, p, X)$ における被覆変換であり，定理 1.9 の同型において，このいいかえは単射 $p'_*:\pi_1(\tilde{X}')\to\pi_1(X)$ に対応する．従って，$\tilde{X}'\cong\tilde{X}/\mathrm{Im}\,p'_*=\tilde{X}/H$.

(3)は(2)より直ちにえられる．　　(終)

この定理は，普遍被覆空間 $\tilde{X}$ が存在しなければ意味がない．例えば，

$$X=\boldsymbol{R}^2-\left\{\left(\frac{1}{n},\ 0\right)\middle|\ n=1, 2, 3, \cdots\right\}$$

は弧状連結，局所弧状連結であるが，それを底空間とする普遍被覆空間の存在しないことが，次の定理からわかる．

定義　X は**局所半単連結**$\Longleftrightarrow$$X$ の各点 x の近傍 V に対して，V に含まれる x の近傍 U があって，射入 $i:U\to X$ について $i_*=0:\pi_1(U, x)\longrightarrow\pi_1(X, x)$.

定理 1.13　弧状連結かつ局所弧状連結な位相空間 X を底空間とする，普遍被覆空間 $(\tilde{X}, p, X)$ が存在するために必要十分な条件は，X が局所半単連結なことである．

［証明］　普遍被覆空間 $(\tilde{X}, p, X)$ が存在するとき，U を基本近傍にとって，右の図式を考えれば，X が局所半単連結であることがわかる．

$$\begin{array}{ccc}\pi_1(U_\alpha) & \longrightarrow & \pi_1(\tilde{X})=0\\ \cong\Big\downarrow (p|U_\alpha)_* & & \Big\downarrow p_*\\ \pi_1(U) & \xrightarrow[i_*]{} & \pi_1(X)\end{array}$$

逆に，X は局所半単連結であるとして，普遍被覆空間 $(\tilde{X}, p, X)$ を作ろう．X の1点 x_0 は固定し，

$\tilde{X}=\{x_0$ を始点とする道 $u:(I, 0, 1)\to(X, x_0, x_1)$ のホモトピー類 $[u]\}$

$p:\tilde{X}\to X\Longleftrightarrow p[u]=u(1)$

と置く．$\tilde{X}$ の位相は，

V が$[u]$の近傍$\Longleftrightarrow$$p[u]=u(1)$ の近傍 $U\subset X$ があって，$u(1)$を始点とする任意

の道 $u':I\to U$ について $[u*u']\in V$

によって定義する．p が連続な全射であることは明らかである．

$x\in X$ の近傍 U で弧状連結かつ $i_*=0:\pi_1(U,x)\to\pi_1(X,x)$ をみたすものをとる．$p^{-1}(U)$ の任意の点 $[u]$ に対して，$p[u]$ と x を結ぶ U 内の道 v をとり，$\tilde{x}_\alpha=[u*v]\in p^{-1}(x)$ とおく．$\tilde{x}_\alpha$ は v のとり方に無関係に定まることは，$i_*=0$ からわかる．各 α について，このような v のとれる $[u]$ 全体を U_α とすると，$p^{-1}(U)=\cup_\alpha U_\alpha$, $U_\alpha\cap U_\beta=\phi(\alpha\neq\beta)$, かつ $p|U_\alpha:U_\alpha\to U$ は全単射である．さらに，U_α の近傍と U の近傍が p によって対応していることから，$p|U_\alpha$ は同相写像であり，各 U_α は $p^{-1}(U)$ の開集合であることもわかる．以上によって，$(\tilde{X},p,X)$ が被覆空間であることが証明された．

$[w]\in\pi_1(X,x_0)$ に対して，$w:(I,\partial I)\to(X,x_0)$ のリフト $\tilde{w}:(I,0)\to(\tilde{X},[0])$ が $\tilde{w}(s)=[w_s]$, $w_s(t)=w(st)$ によって定義される．$\tilde{\psi}[w]=\tilde{w}(1)\in p^{-1}(x_0)$ とおくと，$p^{-1}(x_0)=\{[w]\,|\,w:(I,0,1)\to(X,x_0,x_0)\}=\pi_1(X,x_0)$ であるから，$\tilde{\psi}:\pi_1(X,x_0)\to p^{-1}(x_0)$ は全単射．定理1.6(3)の全単射 ψ は $\tilde{\psi}$ から誘導されるから，$\mathrm{Im}\,p_*=\mathrm{Ker}\,\psi=0$. $p_*:\pi_1(\tilde{X})\to\pi_1(X)$ は単射であるから，$\pi_1(\tilde{X})=0$. 即ち $(\tilde{X},p,X)$ は普遍被覆空間である．　(終)

系 1.14　位相多様体（特に，微分多様体，Lie 群とその等質空間）は弧状連結であれば，それを底空間とする普遍被覆空間が存在する．

被覆空間は次に述べるファイバーバンドルの特殊なものと考えることができる．

§2　ファイバーバンドルの基本的性質

ファイバーバンドルの定義

以下で，ファイバーバンドルに関する基礎的知識を述べる．詳細については，例えば，N.E. Steenrod [13] 参照．

定義　(E,p,B,F) が**積バンドル**または**自明なファイバー空間**

$\Longleftrightarrow$ 同相写像 $\phi:B\times F\to E$ があって，$p\phi(b,y)=b$ をみたす．

$\xi=(E,p,B,F)$ が**局所自明ファイバー空間**

$\Longleftrightarrow$ $p:E\to B$ は写像，B の各点に対して，その開近傍 U があって，

$\xi | U = (p^{-1}(U),\ p|p^{-1}(U),\ U,\ F)$ は積バンドル．

このとき，E を**全空間**，p を**射影**，B を**底空間**，F を**ファイバー**，

$$F_b = p^{-1}(b),\quad b \in B$$

を **b の上のファイバー**，U を**座標近傍**，同相 $\phi_U : U \times F \to p^{-1}(U)$ を**座標関数**という．

定義　同じファイバーをもつ局所自明ファイバー空間 $\xi' = (E', p', B', F)$ と $\xi = (E, p, B, F)$ の間の**ファイバー写像** $f : \xi' \to \xi$

$\Longleftrightarrow$ $f : E' \to E$ は写像で，B' の各点 b' の上のファイバー $F_{b'}$ は f によって B のある点 b 上のファイバー F_b の中へ写される．

このとき，$b = \bar{f}(b')$ とおけば $\bar{f} : B' \to B$ は $p \circ f = \bar{f} \circ p'$ をみたす．

$$\begin{array}{ccc} E' & \xrightarrow{f} & E \\ \downarrow{\scriptstyle p'} & \bar{f} & \downarrow{\scriptstyle p} \\ B' & \longrightarrow & B \end{array}$$

局所自明なファイバー空間 $\xi = (E, p, B, F)$ と写像 $g : B' \to B$ に対して，

$$g^{\#}E = \{(x,\ b') \mid p'(x) = g(b')\} \subset E \times B',$$
$$\tilde{g}(x,\ b') = x,\quad p'(x,\ b') = b'$$

とおけば，$g^{\#}\xi = (g^{\#}E,\ p',\ B',\ F)$ は局所自明なファイバー空間，$\tilde{g} : g^{\#}E \to E$ は $\bar{\tilde{g}} = g$ となるファイバー写像であることがわかる．$g^{\#}\xi$ を g によって ξ から**誘導された局所自明ファイバー空間**という．

位相群 G がファイバー F に左から作用しているとする．

定義　$(E,\ p,\ B,\ F,\ G,\ \{U_\alpha,\ \phi_\alpha\})$ が**座標バンドル**

$\Longleftrightarrow$ $(E,\ p,\ B,\ F)$ は $\{U_\alpha,\ \phi_\alpha\}$ を座標近傍および座標関数にもつ局所自明ファイバー空間であって，

$$\phi_\alpha(b,\ y) = \phi_\beta(b,\ g_{\beta\alpha}(b) \cdot y),\quad b \in U_\alpha \cap U_\beta$$

によって，(連続)写像 $g_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \to G$ が定まる．

この $\{g_{\beta\alpha}\}$ を**座標変換**，G を**構造群**とよぶ．

定義　2つの座標バンドル $\xi = (E,\ p,\ B,\ F,\ G,\ \{U_\alpha,\ \phi_\alpha\})$ と $\xi' = (E',\ p',\ B',\ F,\ G,\ \{U_\beta',\ \phi_\beta'\})$ の間の**バンドル写像** $f : \xi \to \xi'$

$\Longleftrightarrow$ f は局所自明ファイバー空間の間のファイバー写像であって，

$$f\phi_\alpha(b,\ y) = \phi_\beta'(\bar{f}(b),\ \bar{g}_{\beta\alpha}(b) \cdot y),\quad b \in U_\alpha \cap \bar{f}^{-1}(U_\beta)$$

によって定まる $\bar{g}_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap \bar{f}^{-1}(U_\beta) \to G$ は連続．

定義　座標系のみ異なる2つの座標バンドル $\xi=(E,\ p,\ B,\ F,\ G,\ \{U_\alpha,\ \phi_\alpha\})$, $\xi'=(E,\ p,\ B,\ F,\ G,\ \{U_\beta',\ \phi_\beta'\})$ が**厳密な意味で同値**

$\Longleftrightarrow$恒等写像 $1_E: E\to E$ はバンドル写像 $1_E: \xi\to\xi'$ である.

これが同値関係であることは容易にわかる.

定義　座標バンドルの厳密な意味での同値による各類を**ファイバーバンドル**といい, $\xi=(E,\ p,\ B,\ F,\ G)$ で表わす.

ファイバーバンドルを論ずるときは, その代表元である適当な座標バンドルの座標近傍, 座標関数, 座標変換を用いる. 座標バンドルでの用語, 全空間, 射影, 底空間, ファイバー, 構造群, ファイバー写像, バンドル写像等はそのままファイバーバンドルでも用いられる.

座標バンドル $\xi=(E,\ p,\ B,\ F,\ G,\ \{U_\alpha,\ \phi_\alpha\})$ において, $U_\alpha\times F$ の位相和から全空間 E の上への写像

$$\coprod_\alpha \phi_\alpha : \coprod_\alpha U_\alpha\times F\longrightarrow E$$

を考えると, E は次のように構成できることがわかる:

$$E=\coprod_\alpha U_\alpha\times F/\sim;\ (b,\ f)(\in U_\alpha\times F)\sim(b,\ g_{\beta\alpha}(b)\cdot f)(\in U_\beta\times F)$$

このことから, 次の定理がえられる.

定理 2.1　(1)　$B,\ F,\ G$ をそれぞれ, 底空間, ファイバー, 構造群とする座標バンドルと, 関係式

$$g_{\gamma\beta}(b)g_{\beta\alpha}(b)=g_{\gamma\alpha}(b),\quad b\in U_\alpha\cap U_\beta\cap U_\gamma$$

をみたす B の開被覆 $\{U_\alpha\}$ と写像 $g_{\beta\alpha}: U_\alpha\cap U_\beta\to G$ の系 $(U,g)=\{U_\alpha,\ g_{\beta\alpha}\}$ とは1対1に対応する.

(2)　上のような $B,\ F,\ G$ をもつファイバーバンドルと, 細分と写像の制限に関する極限 $\varinjlim(U,\ g)_\lambda$ とは1対1に対応する.

微分多様体 M の接バンドル空間 TM は上の様に構成され, $g_{\beta\alpha}(b)\in GL(n,\ \boldsymbol{R})$ である. よって, M の接バンドルは次のようなファイバーバンドルである:

$$\tau_M=(TM,\ p,\ M,\ \boldsymbol{R}^n,\ GL(n,\ \boldsymbol{R}))$$

定義　ファイバーが $\boldsymbol{F}^n$, 構造群 G が $GL(n,\ \boldsymbol{F})$ の部分群であるファイバーバンドルを, **n 次元 $\boldsymbol{F}$- ベクトルバンドル**という.

定理 2.2　(1)　n 次元 $\boldsymbol{F}$- ベクトルバンドル $\xi=(E,\ p,\ B,\ \boldsymbol{F}^n,\ GL(n,\ \boldsymbol{F}))$ の

各ファイバー $\boldsymbol{F}_b^n = p^{-1}(b)$ は，自然な $\boldsymbol{F}$- 右加群 ($\boldsymbol{F}=\boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}$ のときはベクトル空間)の構造をもち，$\boldsymbol{F}$ の右作用：$E\times\boldsymbol{F}\to E$ および和：$\{(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})\,|\,p(\boldsymbol{u})=p(\boldsymbol{v})\}\to E$ は連続である．

(2) 逆に，局所自明ファイバー空間 $(E, p, B, \boldsymbol{F}^n)$ が連続な和および $\boldsymbol{F}$ の右作用をもてば，それは n 次元 $\boldsymbol{F}$- ベクトルバンドルの構造をもつ．

ファイバーバンドルの簡単な性質

定理 2.3 バンドル写像 $f:\xi\to\xi'$ において，$B=B'$，$\bar{f}=1_B$ ならば，$f:E\to E$ は同相写像で，$f^{-1}:E\to E$ はバンドル写像 $f^{-1}:\xi'\to\xi$ を与える．

定義 同じ B, F, G をもつファイバーバンドル ξ, ξ' が**同値**（**記号** $\xi\equiv\xi'$）$\Longleftrightarrow \bar{f}=1_B$ となるバンドル写像 $f:\xi\to\xi'$ がある．

定理 2.4 ファイバーバンドル $\xi=(E', p', B', F, G)$ から写像 $g:B\to B'$ によって誘導された局所自明ファイバー空間はファイバーバンドル $g^{\#}\xi'=(g^{\#}E, p, B, F, G)$ で，$\tilde{g}:g^{\#}\xi'\to\xi'$ はバンドル写像である．逆にバンドル写像 $f:\xi\to\xi'$ について $\xi\equiv\bar{f}^{\#}\xi'$．

定理 2.5 2つのファイバーバンドル $\xi=(E, p, B, F, G)$，$\xi'=(E', p', B, F, G)$ の共通の座標近傍系 $\{U_\alpha\}$ について，それぞれの座標変換を $\{g_{\beta\alpha}\}$，$\{g'_{\beta\alpha}\}$ とする．このとき，$\xi\equiv\xi' \Longleftrightarrow$ 次の式をみたす写像 $\lambda_\alpha: U_\alpha\to G$ の系 $\{\lambda_\alpha\}$ がある：

$$g'_{\beta\alpha}(b)=\lambda_\beta(b)^{-1}g_{\beta\alpha}(b)\lambda_\alpha(b),\quad b\in U_\alpha\cap U_\beta$$

以上の定理は定義から直接確かめることができる．

定義 位相空間 X は**パラコンパクト** $\Longleftrightarrow X$ の任意の開被覆 $\{U_\alpha\}$，$X=\cup_\alpha U_\alpha$ に対して，その細分である(各 V_β はある U_α に含まれる)閉被覆 $\{V_\beta\}$ で**局所有限**(X の各点についてその近傍 W で $W\cap V_\beta\neq\phi$ となる β は有限個)となるものが存在する．

位相空間論より次の結果を引用する．

補題 2.6 (1) パラコンパクト Hausdorff 空間は正規空間である．

(2) 第2可算公理をみたす局所コンパクト Hausdorff 空間はパラコンパクト Hausdorff 空間である．

(3) パラコンパクト Hausdorff 空間の開被覆 $\{U_\alpha\}$ に対して，その局所有限な細分 $\{V_\beta\}$ と $V_\beta\supset\overline{W}_\beta$ をみたす開被覆 $\{W_\beta\}$ がある．さらに，X 上の実数値

連続関数 ε_β で $\varepsilon_\beta(X-W_\beta)=0$ かつ $\sum_\beta \varepsilon_\beta=1$ をみたすもの(**1 の分割**)がある.

定義　写像 $p: E\to B$ の $B_0\subset B$ における**切断** $s: B_0\to E \Longleftrightarrow p\circ s=1_{B_0}$

B における切断 $s: B\to E$ を単に p の**切断**という.

ファイバーバンドル (E, p, B, F, G) の**切断** $s \Longleftrightarrow$ 射影 p の切断 $s: B\to E$.

補題 2.7　ファイバーバンドル (E, p, B, F, G)において, B はパラコンパクト Hausdorff 空間, F は n 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^n$ に同相ならば, B の閉集合 B_0 における切断は B 全体の切断に拡張できる.

この補題の証明には, 座標近傍系 $\{U_\alpha\}$ に対して補題 2.6(3) の局所有限な細分 $\{V_\beta\}$ を考え, $\{\beta\}$ に整列順序を与えて超限帰納法により順次各 $\overline{V}_\beta$ へ切断を拡大する. その際, $p^{-1}(\overline{V}_\beta)\cong\overline{V}_\beta\times\boldsymbol{R}^n\to\overline{V}_\beta$ において $\overline{W}=\bigcup_{\gamma<\beta}(\overline{V}_\gamma\cap\overline{V}_\beta)$ 上に与えられた切断を $\overline{V}_\beta$ に拡大するには, 任意の連続写像 $\overline{W}\to\boldsymbol{R}^n$ が $\overline{V}_\beta$ に拡大されることを示せばよい. これは, B が正規空間であるから Urysohn の定理によって保障されている.

主バンドル

定義　G のそれ自身への作用を位相群 G の積で与えるとき, $G=F$ であるファイバーバンドル $\xi=(E, p, B, F, G)$ を **G-バンドル**, または, **主(G)-バンドル**といい $\xi=(E, p, B, G)$ で表わす.

定理 2.8　主バンドルが切断をもつ $\Longleftrightarrow$ 主バンドルが自明な主バンドルに同値.

定義　写像 $p: E\to B$ の点 $b\in B$ における**局所切断** $s: U\to E \Longleftrightarrow U$ は b の近傍で, s は $p|p^{-1}(U): p^{-1}(U)\to U$ の切断.

明らかに, 局所自明ファイバー空間の射影は(底空間の各点において)局所切断をもっている.

定理 2.9　G-バンドル (E, p, B, G)において, $p(x, g)=p(x)$ をみたす G の E への右作用 $E\times G\to E$ を

$$\phi_\alpha(b, g)\cdot g'=\phi_\alpha(b, gg'),\quad b\in U_\alpha$$

によって定義できる. 逆に, 位相群 G の位相空間 E への右作用 $E\times G\to E$ があるとき, 射影 $p: E\to B=E/G$ が各点の近傍 U_α における(局所)切断 $s_\alpha: U_\alpha\to E$ をもち, $\phi_\alpha(b, g)=s_\alpha(b)\cdot g$ できまる $\phi_\alpha: U_\alpha\times G\to p^{-1}(U_\alpha)$ が同相となるな

らば，(E, p, B, G) は G-バンドルである．

この定理の後半の性質をもつ局所自明ファイバー空間を，主バンドルの定義とすることができる．この定義より出発してファイバーバンドルを定義するには以下の構成を用いればよい．

位相群 G が右から X に，左から Y に作用しているとき，積空間 $X\times Y$ に関係

$$(x, y)\sim(x\cdot g, g^{-1}\cdot y), \quad g\in G, \quad x\in X, \quad y\in Y$$

を与えてえられる空間を

$$X\times_G Y=X\times Y/\sim$$

で表わす．写像 $f: X\to X'$，$g: Y\to Y'$ が上のような G の作用と可換であるとき，これらは写像

$$f\times_G g: X\times_G Y\to X'\times_G Y'$$

を誘導する．次の定理は定義にもどれば容易に証明される．

定理 2.10　主バンドル $\xi=(E, p, B, G)$ と，G が左から作用する F について，$\xi\times_G F=(E\times_G F, p', B, F, G)$，$p'(x, y)=p(x)$，は F をファイバーとするファイバーバンドルである．G の F への作用が効果的なときは，逆に，任意のファイバーバンドル $\xi'=(E', p', B, F, G)$ に対して，$\xi'\equiv\xi\times_G F$ となる G-バンドル ξ が存在し，対応 $\xi\to\xi\times_G F$ は主バンドルとファイバーバンドルの間の1対1対応を与え，またバンドル写像に関しても1対1対応 $f\to f\times_G 1_F$ がある．

定義　$\xi'\equiv\xi\times_G F$ のとき，ξ' は主バンドル ξ の**同伴ファイバーバンドル**，ξ はファイバーバンドル ξ' の**同伴主バンドル**といわれる．

位相群 E とその閉部分群 G と単位元 e について，射影

$$p: E\to E/G$$

が $p(e)$ において局所切断 $s: U\to E$ をもつとき，E の各点 x について，$U_x=x\cdot U$，$s_x(b)=x\cdot s(x^{-1}\cdot b)$，$b\in U_x$，とおけば，$s_x: U_x\to E$ は $p(x)$ における局所切断であり，定理2.10の後半の条件をみたしている．また，G の部分群 H について $E\times_G(G/H)=E/H$ であるから，次の定理がえられる．

定理 2.11　上の $p: E\to E/G$ が $p(e)$ における局所切断をもてば，$\xi=(E, p, E/G, G)$ は G-バンドル，$\xi'=(E/H, p', E/G, G/H, G)$ は G/H をファイバーとする ξ の同伴ファイバーバンドルである．

ここで，構造群 G のファイバー G/H への作用は一般には効果的ではない．

ファイバーバンドル $(E,\ p,\ B,\ F,\ G)$ において，G の F への作用が効果的でない場合には，正規閉部分群 $G_0=\{g\in G \mid L_g=1_F\}$ を考えると，商群 G/G_0 は F に効果的に作用し，上のファイバーバンドルから自然にファイバーバンドル $(E,\ p,\ B,\ F,\ G/G_0)$ がえられる．定理 2.11 においては，G_0 は H に含まれる最大の正規部分群である．

第 1 章，系 5.18 より，

系 2.12　G を Lie 群，$H,\ K$ をその閉部分群，$H\supset K$ とするとき，$(G,\ p,\ G/H,\ H)$ は H-バンドル，$(G/K,\ p,\ G/H,\ H/K,\ H)$ はファイバーバンドルである．

例えば，$(U(n,\ \boldsymbol{F}),\ p,\ S(\boldsymbol{F}^n),\ U(n-1,\ \boldsymbol{F}))$ は主バンドルである．(第 1 章，定理 2.10)

バンドルのホモトピー

$\{U_\alpha,\ \phi_\alpha\}$ を座標系にもつファイバーバンドル $\xi=(E,\ p,\ B,\ F,\ G)$ と単位閉区間 $I=[0,1]$ に対して，

$$\{U_\alpha\times I,\ \Phi_\alpha\},\quad \Phi_\alpha((b,\ t),\ y)=(\phi_\alpha(b,\ y),\ t),\quad t\in I$$

で与えられる座標系をもつファイバーバンドルを次のように表わす：

$$\xi\times I=(E\times I,\ p\times 1_I,\ B\times I,\ F,\ G)$$

(2.13)　(1)　射影 $\pi : B\times I\longrightarrow B$ について，$\pi^{\#}\xi\equiv\xi\times I$

(2)　射入 $i_t : B\longrightarrow B\times I$，$i_t(b)=(b,\ t)$，について，$i_t{}^{\#}(\xi\times I)\equiv\xi$

定義　バンドル写像 $H:\xi\times I\to\xi'$ および $h_t=H(\ ,t):\xi\to\xi'$ を**バンドルのホモトピー**という．このとき，h_0 と h_1 は**ホモトープ**であるといい，$h_0\simeq h_1:\xi\to\xi'$ で表わす．

$\overline{H} : B\times I\to B'$，$\bar{h}_t : B\to B'$ は通常のホモトピーである．

定理 2.14 (バンドルにおける被覆ホモトピー定理)　$\xi,\ \xi'$ は同じ構造群 G と同じファイバー F をもつファイバーバンドル，ξ の底空間 B はパラコンパクト Hausdorff 空間であるとする．バンドル写像 $h:\xi\to\xi'$ とホモトピー $\overline{H} : B\times I\to B'$ において $\bar{h}=\bar{h}_0$ であれば，$\overline{H}$ を誘導し $h=h_0$ であるようなバンドルのホモトピー $H:\xi\times I\to\xi'$ が存在する．ここで，$t\in[a,\ b]$ について $\bar{h}_t=\bar{h}_a$ であれば $h_t=h_a$，$t\in[a,\ b]$，となるように H をとれる．

この定理はファイバーバンドルの理論において基本的に重要な定理である．ξが自明なバンドルであるときは定理は容易に証明され，従って定理は局所的には明らかである．底空間のパラコンパクト性は局所的な性質を全体に拡げるときに使われる．

系 2.15　Bはパラコンパクト Hausdorff 空間とする．

(1)　$B\times I$の上のファイバーバンドルξ'について，$\xi'\equiv i_0{}^{\#}\xi'\times I$

(2)　B'上のファイバーバンドルξについて，$f\simeq g: B\to B' \Longleftrightarrow f^{\#}\xi\equiv g^{\#}\xi$

(3)　Bは可縮($\Longleftrightarrow 1_B\simeq 0: B\to B$)ならば，$B$は自明なバンドルと同値である．

構造群GのファイバーFへの作用をGの閉部分群Hに制限すればHはFに作用している．このとき，Hを構造群とするファイバーバンドル$\xi=(E, p, B, F, H)$は自然にGを構造群とするファイバーバンドル$\xi_G=(E, p, B, F, G)$とみなすことができる．逆に，Gを構造群とするファイバーバンドル$\xi'=(E, p, B, F, G)$は上のようなHを構造群とするファイバーバンドルがあって，Gを構造群とするファイバーバンドルとして同値$\xi'\equiv\xi_G$となるとき，構造群をHに**縮小**できる，また，ξはξ'の構造群GをHに縮小してえられるファイバーバンドルであるという．

定理 2.16　底空間Bはパラコンパクト Hausdorff 空間，射影$G\to G/H$は局所切断をもち，$G/H\cong \boldsymbol{R}^n$(同相)であるとする．

(1)　B上のファイバーバンドル　$\xi=(E, p, B, F, G)$は構造群をHに縮小できる．

(2)　GがFに効果的に作用しているとき，構造群をGからHに縮小してえられる2つのファイバーバンドルがGを構造群とするファイバーバンドルとして同値であれば，それらはHを構造群とするファイバーバンドルとしても同値である．

定理の証明には，同伴G-バンドルξ_Gとその同伴ファイバーバンドル$\xi_G/H=\xi_G\times_G(G/H)$を考える．(1)は$\xi_G/H$が切断をもつことに帰着され，補題2.7によって証明される．(2)　$\xi_G\equiv\xi'_G$を示す$B\times I$上のG-バンドルη_Gは$B\times\{0, 1\}$上では構造群がHに縮小され，η_G/Hは$B\times\{0, 1\}$で切断をもつ．この切断を$B\times I$に拡張できることが補題2.7と同様に示され，η_Gは構造群がHに縮

小される．これから(2)がえられる．

第1章，定理4.11をこの定理に適用して，

系 2.17　底空間 B はパラコンパクト Hausdorff 空間とする．$GL(n, \boldsymbol{F})$ を構造群とする n 次元 $\boldsymbol{F}$- ベクトルバンドルの同値類と，$U(n, \boldsymbol{F})$ を構造群とするものとは，縮小によって1対1対応にある．

§3　ホモトピー群とファイバー空間

ホモトピー群の基本的性質

基本群の一般次元への拡張として，ホモトピー群が定義される．

記号　$[X, A_1, \cdots, A_n ; Y, B_1, \cdots, B_n]=\{h:(X, A_1, \cdots, A_n)\to(Y, B_1, \cdots, B_n)\}/\simeq=\{$上の h のホモトピー類$[h]$の集合$\}$

$I^n=\{(t_1, \cdots, t_n)\in\boldsymbol{R}^n \mid 0\leq t_i\leq 1,\ i=1, \cdots, n\}$: **単位 n- 立方体**

$\partial I^n=\{(t_1, \cdots, t_n)\in I^n \mid \prod_{i=1}^{n} t_i(1-t_i)=0\}$: I^n の**境界**

$J^{n-1}=\{(t_1, \cdots, t_n)\in I^n \mid t_n\prod_{i=1}^{n-1} t_i(1-t_i)=0\}=\overline{\partial I^n-I^{n-1}\times 0}$

$\pi_n(X, A, x_0)=[I^n, \partial I^n, J^{n-1};\ X, A, x_0]\quad(x_0\in A\subset X)$

$\pi_n(X, x_0)=[I^n, \partial I^n;\ X, x_0]\quad(=\pi_n(X, x_0, x_0))$

2つの写像 $h_1, h_2:(I^n, \partial I^n, J^{n-1})\to(X, A, x_0)$ に対して，その和 h_1+h_2 を

$h_1+h_2:(I^n, \partial I^n, J^{n-1})\to(X, A, x_0)\Longleftrightarrow$

$$(h_1+h_2)(t_1, \cdots, t_n)=\begin{cases} h_1(2t_1, t_2, \cdots, t_n) & (t_1\leq\frac{1}{2}) \\ h_2(2t_1-1, t_2, \cdots, t_n) & (t_1\geq\frac{1}{2}) \end{cases}$$

で定義する．ただし，この定義は，$n>1$，または $n=1$，$A=x_0$ のときに意味があり，この和はホモトピー類の間にも定義されて $\pi_n(X, A, x_0)$ が群となることはよく知られている．これを (X, A, x_0) の **n 次(元)ホモトピー群**という．$n=1$，$A=x_0$ の場合が基本群である．

以下，ホモトピー群の基本的性質を列挙しよう．

(3.1)　$f:(X, A, x_0)\to(Y, B, y_0)$ に対して，

$$f_*:\pi_n(X, A, x_0)\longrightarrow\pi_n(Y, B, y_0)\Longleftrightarrow f_*[h]=[f\circ h]$$

は $f\simeq f'\Longrightarrow f_*=f'_*$，$(g\circ f)_*=g_*\circ f_*$，$(1_X)_*=1$ をみたし，和が定義される

ときは準同型：$f_*(\alpha+\beta)=f_*(\alpha)+f_*(\beta)$ である.

(3.2)　$n>2$, または $n=2$, $A=x_0$ のとき, $\pi_n(X, A, x_0)$ は可換群である.

定値写像 $h_0: I^n\to x_0$ の類を $0\in\pi_n(X, A, x_0)$ と記す. $\pi_n(X, A, x_0)$ が群をなすときは, 0がその単位元である.

定義　特定元0をもつ集合の間の写像の系列 $\cdots\to G_{n+1}\xrightarrow{f_{n+1}}G_n\xrightarrow{f_n}G_{n-1}\to\cdots$ が**完全**$\Longleftrightarrow$各 n につき, $\mathrm{Ker}\, f_n(=f_n^{-1}(0))=\mathrm{Im}\, f_{n+1}(=f_{n+1}(G_{n+1}))$.

(3.3)　$\cdots\to\pi_{n+1}(X, A, x_0)\xrightarrow{\partial}\pi_n(A, x_0)\xrightarrow{i_*}\pi_n(X, x_0)\xrightarrow{j_*}\pi_n(X, A, x_0)\to\cdots\to\pi_1(X, A, x_0)\xrightarrow{\partial}\pi_0(A)\xrightarrow{i_*}\pi_0(X)$ は完全. ただし, $i:(A, x_0)\to(X, x_0)$, $j:(X, x_0, x_0)\to(X, A, x_0)$ は射入, ∂ は

$$\partial:\pi_{n+1}(X, A, x_0)\longrightarrow\pi_n(A, x_0)\Longleftrightarrow\partial[h]=[h|I^n\times 0]$$

で与えられ, $n\geq 1$ ならば準同型である. また, ∂ は自然性(下図の可換性)をもつ:

$$\begin{array}{ccc}\pi_{n+1}(X, A, x_0) & \xrightarrow{\partial} & \pi_n(A, x_0)\\ \downarrow f_* & & \downarrow f_*\\ \pi_{n+1}(Y, B, y_0) & \xrightarrow{\partial} & \pi_n(B, y_0)\end{array}$$

(3.3)′　$\cdots\to\pi_{n+1}(X, A, x_0)\xrightarrow{\partial}\pi_n(A, B, x_0)\xrightarrow{i_*}\pi_n(X, B, x_0)\xrightarrow{j_*}\pi_n(X, A, x_0)\to\cdots\to\pi_1(X, A, x_0)$ は完全. ただし, i, j は射入, ∂ の定義は上と同様.

(3.4)　$h:(I^n, \partial I^n)\to(X, x_1)$ と道 $w:(I, 0, 1)\to(X, x_0, x_1)$ に対して, ホモトピー $h_t: I^n\to X$ で, $h_1=h$, $h_t(\partial I^n)=w(t)$ をみたすものが存在する. このとき, w の類 $[w]$ について,

$$[w]_*:\pi_n(X, x_1)\longrightarrow\pi_n(X, x_0)\Longleftrightarrow[w]_*[h]=[h_0]$$

は, 代表元 w, h のとり方に無関係に定まる同型対応で,

$$[w*w']_*=[w]_*\circ[w']_*,\quad [0]_*=1$$

をみたす. 特に $\pi_1(X, x_0)$ は $\pi_n(X, x_0)$ に作用する.

このことより, X が弧状連結であれば, $\pi_n(X, x_0)$ は基点 x_0 のとり方に無関係に同型の意味で一意的である. x_0 を省略して, 単に $\pi_n(X)$ と書くこともある. 同様なことは, A が弧状連結である $\pi_n(X, A, x_0)$ でも成り立ち, $\pi_n(X, A)$ と略記される.

(3.4′)　$h:(I^n, \partial I^n, J^{n-1})\to(X, A, x_1)$ と道 $w:(I, 0, 1)\to(A, x_0, x_1)$ に対して, $h_1=h$, $h_t(J^{n-1})=w(t)$ をみたす $h_t:(I^n, \partial I^n)\to(X, A)$ が存在し,

$$[w]_*:\pi_n(X,\ A,\ x_1)\cong\pi_n(X,\ A,\ x_0)\Longleftrightarrow[w]_*[h]=[h_0]$$

が定義され，$[w*w']_*=[w]_*\circ[w']_*$，$[0]_*=1$ をみたす．$\pi_1(A,\ x_0)$ は $\pi_n(X,\ A,\ x_0)$ に作用する．

定義　X : **n-単純**$\Longleftrightarrow\pi_0(X)=0$ かつ $\pi_1(X)$ の $\pi_n(X)$ への作用は自明．

(X, A) : **n-単純**$\Longleftrightarrow\pi_0(A)=\pi_0(X)=0$ かつ $\pi_1(A)$ の $\pi_n(X, A)$ への作用は自明．

(3.5)　等化写像 $\psi: I^n\to I^n/\partial I^n\cong S^n$ について，$\psi^*[h]=[h\circ\psi]$は全単射ψ^* : $[S^n,\ *;\ X,\ x_0]\cong\pi_n(X,\ x_0)$を与える．$X$: n-単純$\Longrightarrow\psi^*:[S^n,\ X]\cong\pi_n(X,\ x_0)$

(3.5′)　等化写像 $\psi: I^n\to I^n/J^{n-1}=E^n$ について，$\psi^*[h]=[h\circ\psi]$ は全単射 $\psi^*:[E^n,\ S^{n-1},\ *;\ X,\ A,\ x_0]\cong\pi_n(X,\ A,\ x_0)$ を与える．$(X,\ A)$: n- 単純$\Longrightarrow$ $\psi^*:[E^n,\ S^{n-1};\ X,\ A]\cong\pi_n(X,\ A,\ x_0)$.

ファイバー空間と道の空間

ファイバーバンドルにおける被覆ホモトピー性質を I^n についてだけみたすものとして，ファイバー空間を定義する．ホモトピー群や(コ)ホモロジー群に関する性質を求めるには，このように一般化されたファイバー空間で考えれば十分である．

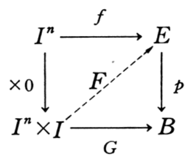
定義　$(E,\ p,\ B)$が(**Serre の意味の**)**ファイバー空間**

$\Longleftrightarrow p: E\to B$ は連続な全射で，$I^n(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$に関する次の**被覆ホモトピー性質**をもつ：

$f: I^n\to E$ と $G: I^n\times I\to B$ が

$$(p\circ f)(x)=G(x,\ 0),\quad x\in I^n$$

をみたせば，$F: I^n\times I\to E$ が存在して，次をみたす：



$$G=p\circ F,\quad F(x,\ 0)=f(x),\quad x\in I^n$$

§2と同様な概念や用語がこの場合にも準用される．

上で，E は**全空間**，p は**射影**，B は**底空間**，$F_b=p^{-1}(b)$ は **b の上のファイバー**とよばれる．

2つのファイバー空間$(E',\ p',\ B')$, $(E,\ p,\ B)$ の間の**ファイバー写像** $(f, \bar{f})$: $(E',\ p', B')\to(E,\ p,\ B)$ は $p\circ f=\bar{f}\circ p'$ をみたす写像$f: E'\to E$，$\bar{f}: B'\to B$ の組である．逆に，$(E,\ p,\ B)$と写像 $g: B'\to B$ が与えられているとき，$g^\# E=\{(e,$

$b')\in E\times B\,|\,p(e)=g(b')\}$，$f(e,\ b')=e$，$p'(e,\ b')=b'$ とおくとき，$(g^{\#}E,\ p',\ B')$ はファイバー空間，$(f,\ g)$ はファイバー写像となる．これを g で**誘導されたファイバー空間**，および**ファイバー写像**という．

その他，ファイバー空間 $(E,\ p,\ B)$，$(E',\ p',\ B')$ について，積 $(E\times E',\ p\times p',\ B\times B')$ および $E'=B$ のときの合成 $(E,\ p'\circ p,\ B')$ は，またファイバー空間であることは定義から容易にわかるであろう．

定理 3.6 ファイバーバンドル $\xi=(E,\ p,\ B,\ F,\ G)$ において，$(E,\ p,\ B)$ はファイバー空間である．特に，被覆空間 $(\tilde{X},\ p,\ X)$ はファイバー空間である．

［証明］ $p\circ f=G\,|\,I^n\times 0$ をみたす $f: I^n\to E$，$G: I^n\times I\to B$ が与えられたとする．ξ から f で誘導されたファイバーバンドル $f^{\#}\xi=(E',\ p',\ I^n,\ F,\ G)$，$E'=\{(e,\ x)\in E\times I^n\,|\,p(e)=f(x)\}$，$p'(e,x)=x$，を考える．定理 2.14 により，バンドル写像 $\tilde{f}: f^{\#}\xi\to\xi$ は $\tilde{F}: f^{\#}\xi\times I\to\xi$ へ $\bar{\bar{F}}=G$ となるように拡張される．切断 $s: I^n\to E'$ を $s(x)=(f(x),\ x)$ で定義し，$F=\tilde{F}\circ(s\times 1_I): I^n\times I\to E'\times I\to E$ と置けば，$p\circ F=G$ および $F|I^n\times 0=f$ をみたす．よって，$(E,\ p,\ B)$ は I^n に関する被覆ホモトピー性質をもつ．

被覆空間はファイバーバンドルの特殊なものと考えてもよいが，補題 1.7 を使えば定理は明らかであろう． (終)

注意 3.6′ ファイバーバンドルの場合は，I^n より一般なパラコンパクト Hausdorff 空間に対して，被覆ホモトピー性質が成り立つ．

定義 $\mathrm{Map}(Y,\ X)=\{h: Y\to X(\text{連続})\}$ に次のような**コンパクト開位相**を入れたものを**写像空間**という．Y のコンパクト集合 C と X の開集合 U に対して $W(C,\ U)=\{h\in\mathrm{Map}(Y,\ X)\,|\,h(C)\subset U\}$ は開集合であるとし，$\mathrm{Map}(Y,\ X)$ の開集合はこのような $\{W(C,\ U)\}$ で生成される．

連続写像 $f: X\to X'$，$g: Y'\to Y$ は次の連続写像 $f_{\#}$，$g^{\#}$ を誘導する：

$$f_{\#}: \mathrm{Map}(Y,\ X)\longrightarrow\mathrm{Map}(Y,\ X')\Longleftrightarrow f_{\#}(h)=f\circ h$$

$$g^{\#}: \mathrm{Map}(Y,\ X)\longrightarrow\mathrm{Map}(Y',\ X)\Longleftrightarrow g^{\#}(h)=h\circ g$$

また，$f: Z\times Y\to X$ に対して $\phi f(z)(y)=f(z,\ y)$ とおくことによって，

(3.7) $f: Z\times Y\to X$ は連続 $\Longleftrightarrow\phi f: Z\to\mathrm{Map}(Y,\ X)$ は連続．

(3.8)　$p: \mathrm{Map}(Y, X)\times Y \longrightarrow X (\Longleftrightarrow p(h, y)=h(y))$ は連続.

$\mathrm{Map}(Y, X)$ の部分集合には部分空間としての位相を入れることにする.

記号　$\Omega(X, A, B)=\{w: (I, 0, 1)\longrightarrow(X, A, B)\}\subset\mathrm{Map}(I, X)$：**道の空間**

$$\Omega(X, A)=\Omega(X, A, x_0),\qquad \Omega X=\Omega(X, x_0)=\Omega(X, x_0, x_0)$$

$$P(X, A)=\Omega(X, A, X),\qquad PX=P(X, x_0)=\Omega(X, x_0, X)$$

定理 3.9　X が弧状連結のとき，$(\Omega(X, A, B), p, A\times B)$，$(\Omega(X, A, B), p_0, A)$，$(\Omega(X, A, B), p_1, B)$ はファイバー空間である．ただし，$p(w)=(w(0), w(1))$，$p_0(w)=w(0)$，$p_1(w)=w(1)$.

［証明］ p, p_0, p_1 の連続性は(3.8)よりえられる．これらが全射であることは X が弧状連結であることよりえられる．$Z=I^n$ とする．$f: Z\to\Omega(X, A, B)$，$H: Z\times I\to A\times B$ が $H(z, 0)=p(f(z))$をみたすとする．$H(z, t)=(H_0(z, t), H_1(z, t))$とおくとき，$f(z)(0)=H_0(z, 0)$，$f(z)(1)=H_1(z, 0)$である.

$\tilde{H}: Z\times I\to\Omega(X, A, B)$を次の式で定義する：

$$\tilde{H}(z,t)(s)=\begin{cases} H_0(z, t-4s) & (0\leq s\leq t/4)\\ f(z)\left(\dfrac{4s-t}{4-2t}\right) & ((4-t)/4\leq s\leq 1)\\ H_1(z, 4s+t-4) & (t/4\leq s\leq(4-t)/4)\end{cases}$$

$\tilde{H}$ の連続性は(3.7)よりわかる．$\tilde{H}$ は明らかに，$p\circ\tilde{H}=H$ および $\tilde{H}|Z\times 0=f$ をみたすから，$Z=I^n$ に関する被覆ホモトピー性質が証明された．他の2つの場合も同様である．　（終）

注意 3.9′　道の空間の作るファイバー空間では任意の位相空間に関する被覆ホモトピー性質がみたされる.

定理 3.10　ファイバー空間 (E, p, B) において，$e_0\in F_0=p^{-1}(b_0)$とするとき，

$$p_*: \pi_n(E, F_0, e_0)\cong\pi_n(B, b_0)\quad(\text{全単射})$$

［証明］ まず次の補題を用意する.

(3.10)′　(K, L)は(I^m, J^{m-1})と同相な対とする．$f: L\to E$，$G: K\to B$ が $p\circ f=G|L$ をみたすとき，$F|L=f$ および $G=p\circ F$をみたす $F: K\to E$ が存在する.

$(K, L)=(I^{m-1}\times I, I^{m-1}\times 0)$ としても一般性を失わない．このとき，(3.10)′は I^{m-1} に関する被覆ホモトピー性質に外ならない.

任意の $G: (I^n, \partial I^n)\to(B, b_0)$に対して，$f: J^{n-1}\to E$ を $f(J^{n-1})=e_0$ で定める

と，明らかに，$p\circ f=G|J^{n-1}$．(3.10)′ により，$F: I^n\to E$ で $p\circ F=G$ および $F(J^{n-1})=f(J^{n-1})=e_0$ となるものがある．$p\circ F(\partial I^n)=G(\partial I^n)=b_0 \Longrightarrow F(\partial I^n)\subset F_0$．即ち，$[F]\in\pi_n(E, F_0, e_0)$ は $p_*[F]=[G]$ をみたすから，p_* は全射である．

$f_0, f_1: (I^n, \partial I^n, J^{n-1})\to(E, F_0, e_0)$ について，$p_*[f_0]=p_*[f_1]$ と仮定する．$p\circ f_0\simeq p\circ f_1$ を示すホモトピーを $G: I^{n+1}=I^n\times I\to B$, $G(\partial I^n\times I)=b_0$ とする．$f: I^n\times\partial I\cup J^{n-1}\times I$ を $f|I^n\times 0=f_0$, $f|I^n\times 1=f_1$, $f(J^{n-1}\times I)=e_0$ で定義すれば，$p\circ f=G|I^n\times\partial I\cup J^{n-1}\times I$．$I^n\times\partial I\cup J^{n-1}\times I=\overline{\partial(I^n\times I)-I^{n-1}\times 0\times I}$ であるから，$(I^{n+1}, I^n\times\partial I\cup J^{n-1}\times I)$ は (I^{n+1}, J^n) に同相である．(3.10)′によって，$F: I^{n+1}\to E$ で $p\circ F=G$, $F|I^n\times\partial I\cup J^{n-1}\times I=f$ をみたすものがある．$p\circ F(\partial I^n\times I)=G(\partial I^n\times I)=b_0 \Longrightarrow F(\partial I^n\times I)\subset F_0$ であるから，F は $f_0\simeq f_1: (I^n, \partial I^n, J^{n-1})\to(E, F_0, e_0)$，即ち $[f_0]=[f_1]$ を示している．よって，p_* は単射である．(終)

系 3.11 $\cdots\to\pi_n(F_0)\xrightarrow{i_*}\pi_n(E)\xrightarrow{p_*}\pi_n(B)\xrightarrow{\Delta}\pi_{n-1}(F_0)\to\cdots\to\pi_0(F_0)\xrightarrow{i_*}\pi_0(E)\xrightarrow{p_*}\pi_0(B)$ は完全．ただし，$\Delta=\partial\circ p_*^{-1}: \pi_n(B)\cong\pi_n(E, F_0)\to\pi_{n-1}(F_0)$．

［証明］ (3.3)の完全系列，$(X, A)=(E, B)$, を定理 3.10 の全単射でおきかえればよい．ただし，最後の部分は被覆ホモトピー性質より直接示される．(終)

系 3.12 被覆空間 $(\tilde{X}, p, X)$ と $n>1$ について，$p_*: \pi_n(\tilde{X})\cong\pi_n(X)$．

［証明］ $p^{-1}(x_0)$は疎な位相をもつ$\Longrightarrow \pi_n(p^{-1}(x_0))=0$ $(n>0)$．系 3.11 より，$n>1$ のとき，$0\to\pi_n(\tilde{X})\xrightarrow{p^*}\pi_n(X)\to 0$ は完全$\Longrightarrow p_*$は同型．(終)

n-連結性

定義 X は **n-連結**$\Longleftrightarrow\pi_i(X, x_0)=0$, $0\leq i\leq n$.

(X, A) は **n-連結**$\Longleftrightarrow\pi_0(A)=\pi_0(X)=0$, $\pi_i(X, A, x_0)=0$, $1\leq i\leq n$.

(3.4)および(3.4)′によって，この定義は基点 x_0 のとり方に関係しない．

補題 3.13 (1) $A\subset X$ について $\pi_0(A)=\pi_0(X)=0$ とするとき，

(X, A) は n-連結$\Longleftrightarrow i_*: \pi_i(A)\to\pi_i(X)$ は $i<n$ で同型，$i\leq n$ で全射．

(2) ファイバー空間 (E, p, B) において，$F=p^{-1}(b_0)$ とするとき，

B は n-連結$\Longleftrightarrow i_*: \pi_i(F)\to\pi_i(E)$ は $i<n$ で同型，$i\leq n$ で全射．

［証明］ (3.3)および系 3.11 より容易にえられる．(終)

定理 3.14 n 次元球面 S^n は$(n-1)$-連結である．

［証明］ 任意の $f: (I^k, \partial I^k)\to(S^n, e_1)$ を考える．十分小さい $\varepsilon>0$ について，

$-\boldsymbol{e}_1$ の 4ε-近傍を U とする．$f^{-1}(U)$ において，f を可微分写像（または単体写像）g で ε-近似する：$\|f(x)-g(x)\|<\varepsilon$．　$x\in f^{-1}(U)$, $-\boldsymbol{e}_1$ と $f(x)$ の距離を $\rho(x)$ とするとき，ホモトピー $f_t:(I^k,\ \partial I^k)\to(S^n,\ \boldsymbol{e}_1)$ を次のように定義する：$\rho(x)\geq 3\varepsilon$ のときは $f_t(x)=f(x)$；$3\varepsilon\geq\rho(x)$ のときは $\lambda(x)=\mathrm{Max}(1,\ 3-\rho(x)/\varepsilon)$ とおいて，$f_t(x)$ は $f(x)$ と $g(x)$ とを結ぶ大円の弧（測地線）を $t\lambda(x):1-t\lambda(x)$ の比に分ける点とする．$f_0=f$, f_1 は $-\boldsymbol{e}_1$ の ε-近傍 V について，$f^{-1}(V)$ 上では g と一致する．$k<n$ とすれば g の像でない点は稠密にあるから，$f_1(I^k)\subset S^n-\boldsymbol{v}$ となる $\boldsymbol{v}\in S^n$ がある．$S^n-\boldsymbol{v}$ は $\boldsymbol{R}^n$ に同相であるから，$f_1\simeq 0$．よって，$k\leq n-1\Longrightarrow f\simeq f_1\simeq 0$，即ち，$S^n$ は $(n-1)$-連結．　（終）

定理 3.15　$U(n+m,\ \boldsymbol{F})/1\times U(m,\ \boldsymbol{F})$ および $GL(n+m,\ \boldsymbol{F})/1\times GL(m,\ \boldsymbol{F})$ はともに $(d(m+1)-2)$-連結である．ただし，$d=1$ ($\boldsymbol{F}=\boldsymbol{R}$), $d=2$ ($\boldsymbol{F}=\boldsymbol{C}$), $d=4$ ($\boldsymbol{F}=\boldsymbol{H}$)．$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{R},\ \boldsymbol{C}$ のときは，$SU(n+m,\ \boldsymbol{F})/1\times SU(m,\ \boldsymbol{F})$ および $SL(n+m,\boldsymbol{F})/1\times SL(m,\ \boldsymbol{F})$ も $(d(m+1)-2)$-連結である．

［証明］　第1章の定理 2.10，定理 2.18 をまとめて書くと，

(3.16)　$U(m+1,\ \boldsymbol{F})/1\times U(m,\ \boldsymbol{F})\cong S(\boldsymbol{F}^{m+1})\cong S^{d(m+1)-1}$　（同相）

これは，定理 3.14 によって $(d(m+1)-2)$-連結である．補題 3.13 (2) によって，射入によって誘導される各準同型

$$\pi_i(U(m,\ \boldsymbol{F}))\to\pi_i(U(m+1,\ \boldsymbol{F}))\to\pi_i(U(m+2,\ \boldsymbol{F}))\to\cdots\to\pi_i(U(m+n,\ \boldsymbol{F}))$$

は $i\leq d(m+1)-2$ のとき全射，$i<d(m+1)-2$ のとき単射である．これらを続けた結果に再び補題 3.13 (2) を用いると，$U(n+m,\ \boldsymbol{F})/1\times U(m,\ \boldsymbol{F})$ が $(d(m+1)-2)$-連結であることがえられる．

第1章，定理 4.11 によって，射入

$$U(n,\ \boldsymbol{F})\longrightarrow U(n,\ \boldsymbol{F})\times\boldsymbol{0}\longrightarrow U(n,\ \boldsymbol{F})\times\boldsymbol{R}^{dn(n-1)/2+n}\cong GL(n,\ \boldsymbol{F})$$

はホモトピー同値写像である．このことから，上の議論で $U(n+i,\ \boldsymbol{F})$ を $GL(n+i,\ \boldsymbol{F})$ でおきかえてよいことがわかり，$GL(n+m,\ \boldsymbol{F})/1\times GL(m,\ \boldsymbol{F})$ が $(d(m+1)-2)$-連結であることがえられる．$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{R},\ \boldsymbol{C}$ のときは，

$$SU(n+m,\ \boldsymbol{F})/1\times SU(m,\ \boldsymbol{F})\cong U(n+m,\ \boldsymbol{F})/1\times U(m,\ \boldsymbol{F})$$
$$SL(n+m,\ \boldsymbol{F})/1\times SL(m,\ \boldsymbol{F})\cong GL(n+m,\ \boldsymbol{F})/1\times GL(m,\ \boldsymbol{F})$$

であるから，後半がえられる．　（終）

系 3.17　$i<n-1\Longrightarrow\pi_i(SO(n))\cong\pi_i(SO(n+1))$

$$i<2n \Longrightarrow \pi_i(U(n)) \cong \pi_i(U(n+1)),\quad \pi_i(SU(n)) \cong \pi_i(SU(n+1))$$
$$i<4n+2 \Longrightarrow \pi_i(Sp(n)) \cong \pi_i(Sp(n+1))$$

§4 被覆群

H-空間の被覆空間

定義 X は x_0 を単位元，μ を積とする **H-空間**
$\Longleftrightarrow \mu : (X \times X, (x_0, x_0)) \to (X, x_0)$ は写像で
$$\mu \circ i_1 \simeq 1_X \simeq \mu \circ i_2 : (X, x_0) \to (X, x_0)$$
をみたす．ただし，$i_1, i_2 : X \to X \times X \Longleftrightarrow i_1(x) = (x, x_0),\ i_2(x) = (x_0, x)$
特に，位相群は H-空間である．

H-空間 X においては，その積 μ を用いて，写像 $f, g : Y \to X$ の積を
$$f \cdot g : Y \longrightarrow X \Longleftrightarrow (f \cdot g)(y) = \mu(f(y), g(y)),\quad y \in Y$$
で定義できる．$B \subset Y$ について，$f(B) = g(B) = x_0 \Longrightarrow (f \cdot g)(B) = x_0$ である．

定理 4.1 H-空間 X における $f, g : (I^n, \partial I^n) \to (X, x_0)$ について，
$$[f \cdot g] = [f] + [g] \in \pi_n(X, x_0)$$
であり，基本群 $\pi_1(X, x_0)$ は可換群である．

［証明］ x_0 における定値写像 0 について，$0 \cdot f \simeq f \cdot 0 \simeq f$ であることが，H-空間の定義からえられる．また，$f \simeq f'$，$g \simeq g' \Longrightarrow f \cdot g \simeq f' \cdot g'$ も成り立っている．これらは $f+g$ についても成り立っていることに注意する．また，等式
$$(f+g) \cdot (f'+g') = (f \cdot f') + (g \cdot g')$$
が成り立つ．よって，定理は次のホモトピーより導かれる：
$$f+g \simeq (f \cdot 0) + (0 \cdot g) = (f+0) \cdot (0+g) \simeq f \cdot g$$
$$g+f \simeq (0 \cdot g) + (f \cdot 0) = (0+f) \cdot (g+0) \simeq f \cdot g$$
（終）

H-空間の被覆空間には自然に H-空間の構造が入る．

定理 4.2 被覆空間 $(\tilde{X}, p, X)$ の底空間 X が単位元 x_0 と積 μ をもつ H-空間，$F_0 = p^{-1}(x_0)$ を x_0 上のファイバーとする．

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} \times \tilde{X} & \xrightarrow{\tilde{\mu}} & \tilde{X} \\ \downarrow{\scriptstyle p \times p} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ X \times X & \xrightarrow{\mu} & X \end{array}$$

(1) F_0 の各点 $\tilde{x}_0$ に対して，$\tilde{x}_0$ を単位元と

し，前図が可換であるような積 $\tilde{\mu}$ が一意的に存在して，$\tilde{X}$ は H-空間となる．

(2) F_0 は $\tilde{\mu}$ に関して可換群であり，定理 1.6 の $\psi : \pi_1(X, x_0)/p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) \cong F_0$ は群の同型である．従って，F_0 は被覆変換群と同型である．

［証明］ (1) 補題 1.7 (2) を $f = \mu\circ(p\times p) : (\tilde{X}\times\tilde{X},\ (\tilde{x}_0,\ \tilde{x}_0)) \to (X,\ x_0)$ に適用する．$\tilde{X}$ は弧状連結，局所弧状連結であるから $\tilde{X}\times\tilde{X}$ もそうである．(1.4) と定理 4.1 を組合わせると，$f_*(\pi_1(\tilde{X}\times\tilde{X},\ (\tilde{x}_0,\ \tilde{x}_0))) \subset p_*(\pi_1(\tilde{X},\ \tilde{x}_0))$ がえられる．補題 1.7 により，$\tilde{\mu}(\tilde{x}_0,\ \tilde{x}_0) = \tilde{x}_0$ および (1) の図式が可換であるような $\tilde{\mu}$ が一意的に存在する．$\tilde{\mu}$ が H-空間の積の条件をみたすこと，例えば $\tilde{\mu}\circ\tilde{i}_1 \simeq 1_{\tilde{X}}$ を示すホモトピー $\tilde{H}$ を作るには，$\mu\circ i_1 \simeq 1_X$ を示すホモトピー H と右図に，上と同様な議論を行えばよい．

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X}\times I & \xrightarrow{\ \tilde{H}\ } & \tilde{X} \\ \downarrow{\scriptstyle p\times 1} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ X\times I & \xrightarrow{\ H\ } & X \end{array}$$

(2) 定理 4.1 により，$\pi_1(X)$ は可換群であるから，定理 1.10 により，$(\tilde{X},\ p,\ X)$ は正則．定理 1.9 により，$\pi_1(X,\ x_0)/H$，$H = p_*(\pi_1(\tilde{X},\ \tilde{x}_0))$ は被覆変換群と同型．定理 1.6 により全単射 $\psi : \pi_1(X,\ x_0)/H \cong F_0$ がある．ψ は $[w] \in \pi_1(X,\ x_0)$ に対して，w のリフト $\tilde{w}$ で $\tilde{w}(0) = \tilde{x}_0$ となるものをとり，$\tilde{x}_1 = \tilde{w}(1) \in F_0$ を対応させるものである．$[w_2] \in \pi_1(X,\ x_0)$ に対しても同様に $\tilde{w}_2$ と $\tilde{x}_2 = \tilde{w}_2(1) \in F_0$ を考える．いま，

$$\tilde{w}_3 : I \longrightarrow \tilde{X} \Longleftrightarrow \tilde{w}_3(t) = \tilde{\mu}(\tilde{w}_2(t),\ \tilde{x}_1) \quad t \in I$$

を考える．$\tilde{w}_3(0) = \tilde{\mu}(\tilde{x}_0,\ \tilde{x}_1) = (\tilde{\mu}\circ\tilde{i}_1)(\tilde{x}_1)$．(1) の証明における H について，$H|x_0\times I$ は定値写像であり，$\tilde{H}|\tilde{x}_1\times I$ はそのリフトである．補題 1.7 (1) によって，$\tilde{H}|\tilde{x}_1\times I$ は定値写像である．よって，$\tilde{\mu}\circ\tilde{i}_1(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_1 \Longrightarrow \tilde{w}_3(0) = \tilde{x}_1 = \tilde{w}(1)$ となり $\tilde{x}_0$ と $\tilde{\mu}(\tilde{x}_2,\ \tilde{x}_1)$ を結ぶ道 $\tilde{w} * \tilde{w}_3$ が定義できる．(1) の図式の可換性から，$p\circ\tilde{w}_3 = \mu\circ i_2\circ(p\circ\tilde{w}_2) \simeq p\circ\tilde{w}_2$，従って，

$$[p\circ(\tilde{w} * \tilde{w}_3)] = [p\circ\tilde{w} * p\circ\tilde{w}_2] = [w][w_2] = [w_2][w] \quad (\pi_1(X) : \text{可換})$$

これは $\psi([w_2][w]) = \tilde{\mu}(\tilde{x}_2,\ \tilde{x}_1)$，即ち，$\psi$ が同型であることを示している．(終)

定理 4.3 定理 4.2 の積 μ が群の積の公理をみたせば，$\tilde{\mu}$ もそうである．即ち

(1) μ が結合的 $(\mu\circ(\mu\times 1_X) = \mu\circ(1_X\times\mu)) \Longrightarrow \tilde{\mu}$ も結合的．

(2) $\mu\circ i_1 = 1_X = \mu\circ i_2 \Longrightarrow \tilde{\mu}\circ\tilde{i}_1 = 1_{\tilde{X}} = \tilde{\mu}\circ\tilde{i}_2$．

(3) μ が逆元 $\iota : X \to X$ $(\mu(\iota(x),\ x) = x_0 = \mu(x,\ \iota(x)),\ \forall x \in X)$ をもてば $\tilde{\mu}$ も逆元 $\tilde{\iota} : \tilde{X} \to \tilde{X}$ をもつ．

［証明］ $\tilde{\mu}\circ(\tilde{\mu}\times 1_{\tilde{X}})$, $\tilde{\mu}\circ(1_{\tilde{X}}\times\tilde{\mu}):\tilde{X}\times\tilde{X}\times\tilde{X}\to\tilde{X}$ はともに $\mu\circ(\mu\times 1_X)\circ(p\times p\times p):\tilde{X}\times\tilde{X}\times\tilde{X}\to X\times X\times X\to X$ のリフトで，$(\tilde{x}_0, \tilde{x}_0, \tilde{x}_0)$ で一致しているから，補題1.7 (1)によって $\tilde{\mu}\circ(\tilde{\mu}\times 1_{\tilde{X}})=\tilde{\mu}\circ(1_{\tilde{X}}\times\tilde{\mu})$. (2)についても同様. (3)については，まず $\tilde{\iota}(\tilde{x}_0)=\tilde{x}_0$ をみたす $\iota\circ p:\tilde{X}\to X\to X$ のリフトをとる. 対角写像 $d:X\to X\times X$ について，ι は $\mu\circ(\iota\times 1)\circ d=0=\mu\circ(1\times\iota)\circ d$ をみたす. (1)と同様に，$\tilde{\mu}\circ(\tilde{\iota}\times 1)\circ\tilde{d}=0=\tilde{\mu}\circ(1\times\tilde{\iota})\circ\tilde{d}$ が示され，(3)をえる. （終）

普遍被覆群

定理4.2, 定理4.3より，

(4.4) 被覆空間 $(\tilde{X}, p, X)$ において，X が位相群であれば，その単位元 e 上のファイバーの任意の点 $\tilde{e}$ を単位元とし，$p:\tilde{X}\to X$ が準同型であるような $\tilde{X}$ における位相群の構造が一意的に入る.

定義 位相群 $\tilde{G}$, G とその準同型 $p:\tilde{G}\to G$ からなる（普遍）被覆空間 $(\tilde{G}, p, G)$ を（**普遍**）**被覆群**という. また $\tilde{G}$ を G の（**普遍**）**被覆群**という.

補題4.5 $\tilde{G}$ を弧状連結，局所弧状連結な位相群，$p:\tilde{G}\to G$ を位相群の全射準同型とする. $(\tilde{G}, p, G)$ が被覆群であるための必要十分条件は，$\mathrm{Ker}\,p$ が $\tilde{G}$ において疎な位相をもつことである.

［証明］ 必要性は明らかである. $\mathrm{Ker}\,p$ が $\tilde{G}$ で疎な位相をもてば，$\tilde{e}$ の近傍 U で，$UU^{-1}\cap\mathrm{Ker}\,p=\{\tilde{e}\}$ なるものがある. $\tilde{g}\in\tilde{G}$ の近傍 $V=\tilde{g}U$ は定理1.11の条件をみたし，$(\tilde{G}, p, G=\tilde{G}/\mathrm{Ker}\,p)$ は被覆空間となる. （終）

定理4.6 被覆群$(\tilde{G}, p, G)$において，$\mathrm{Ker}\,p$ は $\tilde{G}$ の中心に含まれる. 即ち，任意の $\tilde{x}\in\mathrm{Ker}\,p$ と $\tilde{g}\in G$ について，$\tilde{x}\tilde{g}=\tilde{g}\tilde{x}$.

［証明］ $\tilde{x}\in\mathrm{Ker}\,p$ について，$L_{\tilde{x}}:\tilde{G}\to\tilde{G}$, $R_{\tilde{x}}:\tilde{G}\to\tilde{G}$ はともに被覆変換 $(p\circ L_{\tilde{x}}=p=p\circ R_{\tilde{x}})$ であり，$L_{\tilde{x}}(\tilde{e})=\tilde{x}=R_{\tilde{x}}(\tilde{e})$ であるから，補題1.7 (1)により，$L_{\tilde{x}}=R_{\tilde{x}}$, 即ち，$\tilde{x}\tilde{g}=\tilde{g}\tilde{x}$ $(\forall\tilde{g}\in\tilde{G})$. （終）

系4.7 弧状連結，局所弧状連結な位相群 G の正規部分群 H が G の部分空間として疎な位相をもてば，H は $Z(G)$ に含まれる（第1章，定理1.12参照）.

普遍被覆群について，今までの結果を総合して述べれば，次のようになる.

定理4.8 (1) 弧状連結，局所弧状連結，局所半単連結な位相群 G, 特に連結な Lie 群 G は普遍被覆群 $(\tilde{G}, p, G)$ をもつ.

(2) 位相群 G が普遍被覆空間 $(\tilde{G}, p, G)$ の底空間であれば，全空間 $\tilde{G}$ には p が準同型となるような位相群の構造が一意的に入り，$\mathrm{Ker}\, p$ は G の中心に含まれる疎な部分群で，$\psi: \pi_1(G) \cong \mathrm{Ker}\, p$ (同型).

(3) 普遍被覆群 $(\tilde{G}, p, G)$ において，G を底空間とする任意の被覆群は $\mathrm{Ker}\, p$ の適当な部分群 H によってえられる被覆群 $(\tilde{G}/H, p', G)$ と同値である.

古典群に関する被覆群

補題 4.9 $U(1) \cong SO(2) \cong S^1$ の普遍被覆群は $\boldsymbol{R}$ で，$\pi_1(S^1) \cong \boldsymbol{Z}$ (無限巡回群).

［証明］ 位相加群 $\boldsymbol{R}$ の部分群 $\boldsymbol{Z}=\{$整数$\}$ は疎な位相をもつから，補題 4.5 により，$(\boldsymbol{R}, p, \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})$ は被覆空間. $\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ は S^1 と同型，$\boldsymbol{R}$ は可縮であるから，$\boldsymbol{R}$ は S^1 の普遍被覆群，$\psi: \pi_1(S^1) \cong \boldsymbol{Z}$. (終)

ここで，コンパクト連結古典群の中心を求めよう.

定理 4.10 (1) $U(n)$ の中心は $\{cI_n | c \in \boldsymbol{C},\ |c|=1\} \cong U(1) \cong \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$.

(2) $SU(n+1)$ の中心は $\{cI_{n+1} | c \in \boldsymbol{C},\ c^{n+1}=1\} \cong \boldsymbol{Z}_{n+1}$ (位数 $n+1$ の巡回群).

(3) $Sp(n)$ の中心は $\{I_n, -I_n\} \cong \boldsymbol{Z}_2$.

(4) $SO(2n+1)$ の中心は $\{I_{2n+1}\}$，$SO(2n)$ $(n>1)$ の中心は $\{I_{2n}, -I_{2n}\} \cong \boldsymbol{Z}_2$.

［証明］ これらの群を G，T^n をその標準的極大トーラスとすると，第1章，定理 3.11 により，G の(中心の)元 x は $x=gtg^{-1}$，$g \in G$，$t \in T^n$，の形に書ける. x は中心の元 $\Longrightarrow xg=gx \Longrightarrow x=t \in T^n$. さらに，$W(G)=N(T^n)/T^n$ の T^n への作用は内部自己同型であるから，x はその作用で不変である. 第1章，定理 3.13 の $W(G)$ の作用を考えれば，x の形が限定される.

$G=U(n)$ の場合，$x=\lambda_1 \oplus \cdots \oplus \lambda_n$ は置換で不変 $\Longrightarrow x=cI_n$. $x=cI_n \in U(n)$ だから $|c|=1$. cI_n は明らかに中心の元である. $G=SU(n+1)$ の場合も同様であるが，$\det(cI_{n+1})=1 \Longleftrightarrow c^{n+1}=1$ の条件がつく. $G=Sp(n)$ の場合は，まず $x=cI_n$ で，さらに $c=\bar{c} \Longrightarrow c=\pm 1$. $G=SO(2n+1)$ の場合も $W(G)$ は $G=Sp(n)$ の場合と同様であるから，$x=\pm I_{2n} \oplus I_1$. $x=-I_{2n} \oplus I_1$ は元 $I_{2n-1} \oplus \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ と可換でないから，$SO(2n+1)$ の中心は I_{2n+1} から成る.

$G=SO(2n)$ の場合も，$x=\boldsymbol{r}(cI_n)$ であり，$n>1$ の場合は $x=x^{-1}$ より $x=\pm I_{2n}$ をうる. ($SO(2) \cong U(1)$ は可換でそれ自身が中心.) (終)

上の各古典群の中心による商群を**射影古典群**といい，次のように表わす：

$$PU(n)=U(n)/\{cI_n\}=SU(n)/\{cI_n\,|\,c^n=1\}$$
$$PSp(n)=Sp(n)/\{I_n,\ -I_n\}$$
$$PO(2n)=SO(2n)/\{I_{2n},\ -I_{2n}\}\quad (PO(2n+1)=SO(2n+1))$$

補題 4.11　$PSp(1)$ は $SO(3)$ と同型である．即ち，普遍被覆空間 $(Sp(1),\ \rho,\ SO(3))$ があって，$\mathrm{Ker}\,\rho\cong \boldsymbol{Z}_2$．

［証明］　四元数 $\boldsymbol{H}$ を $\{1, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ を基底とする $\boldsymbol{R}^4$ と同一視するとき，$\boldsymbol{H}$ の元の絶対値には $\boldsymbol{R}^4$ のベクトルの長さが対応する．$Sp(1)=\{x\in \boldsymbol{H}\,|\,|x|=1\}$ の元 x に対して，$\rho(x)(q)=xqx^{-1}$，$q\in\boldsymbol{H}=\boldsymbol{R}^4$ とおく．$\rho(x):\boldsymbol{R}^4\to\boldsymbol{R}^4$ は線型写像で長さを変えないから，直交変換である．$\rho(x)(1)=x1x^{-1}=1$ であるから，$\rho(x)$ は $\boldsymbol{R}^4$ の 1 と直交する $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ を基底とする補空間 $\boldsymbol{R}^3$ の直交変換を与える．明らかに $\rho(xy)=\rho(x)\circ\rho(y)$ であるから，準同型

$$\rho: Sp(1)\longrightarrow O(3)$$

がえられた．$Sp(1)$ は連結であるから，$\rho(Sp(1))\subset SO(3)$．

$\rho(\cos\theta+\boldsymbol{i}\sin\theta)$ を計算すると，$\boldsymbol{iR}$ を軸とする角 2θ の回転であることがわかる．$\rho(\cos\theta+\boldsymbol{j}\sin\theta)$ は $\boldsymbol{jR}$ を軸とする角 2θ の回転である．よく知られているように，3 次元の回転はこのような 2 種の回転の合成として表わされる．これは，$\rho: Sp(1)\to SO(3)$ が全射であることを示している．

$x\in\mathrm{Ker}\,\rho \Longleftrightarrow xqx^{-1}=\rho(x)(q)=q\ \ (\forall q\in\boldsymbol{R}^3)\Longrightarrow x\boldsymbol{i}=\boldsymbol{i}x,\ \ x\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}x\Longrightarrow x=\pm 1$
従って，$\mathrm{Ker}\,\rho=\{1, -1\}$ は $Sp(1)$ の中心に一致し，$PSp(1)$ は $SO(3)$ と同型である．後半は定理 3.14 と $Sp(1)\cong S^3$ より証明される．　(終)

定理 4.12　(1)　$SU(n)$，$Sp(n)$ は 1-連結である．

(2)　$\pi_1(U(n))\cong\boldsymbol{Z}$，$\pi_1(SO(2))\cong\boldsymbol{Z}$

(3)　$n\geq 3$ のとき，$\pi_1(SO(n))\cong\boldsymbol{Z}_2$

［証明］　(1)　$Sp(1)=S(\boldsymbol{H})\cong S^3$ は定理 3.14 により 1-連結．$SU(1)=\{I_1\}$ は明らかに 1-連結．補題 4.9 により，$\pi_1(U(1))\cong\pi_1(SO(2))\cong\boldsymbol{Z}$．また，補題 4.11 と定理 4.8 (2) により，$\pi_1(SO(3))\cong\mathrm{Ker}\,\rho\cong\boldsymbol{Z}_2$．

よって，定理は n に関する帰納法により，系 3.17 を使って容易に証明される．

(終)

$SU(n)$，$Sp(n)$ は，それ自身が普遍被覆群であり，それらを全空間とする被覆群の底空間は中心の部分群による商群であるから，定理 4.10 によって求めら

れる．$U(n)$ の普遍被覆空間については次の結果がえられる．

(4.13) (1) $p: SU(n)\times \boldsymbol{R}\to U(n) \Longleftrightarrow p(A, t)=e^{2\pi it}A$ とおくと，$(SU(n)\times \boldsymbol{R}, p, U(n))$ は普遍被覆群であり，$\mathrm{Ker}\, p$ は $(e^{2\pi i/n}I_n, -1/n)$ で生成される無限巡回群である．

(2) $p: SU(n)\times U(1)\to U(n) \Longleftrightarrow p(A, c)=cA$ とおくと，$(SU(n)\times U(1), p, U(n))$ は被覆群で，$\mathrm{Ker}\, p$ は位数 n の巡回群である．

定義 $n\geq 3$ のとき，$SO(n)$ の普遍被覆群を **n 次 spinor 群**といい，$\mathrm{Spin}(n)$ で表わす．

定理 4.14 (1) $\mathrm{Spin}(2n+1)$ の中心は $\boldsymbol{Z}_2$ に同型である．

(2) $\mathrm{Spin}(4n)$ の中心は $\boldsymbol{Z}_2\oplus\boldsymbol{Z}_2$ に同型，$\mathrm{Spin}(4n+2)$ の中心は $\boldsymbol{Z}_4$ に同型である．

［証明］ (1) $p: \mathrm{Spin}(2n+1)\to SO(2n+1)$ の核は中心に入る．一方 $SO(2n+1)$ の中心は単位元のみであるから，$\mathrm{Ker}\, p\cong \boldsymbol{Z}_2$ は $\mathrm{Spin}(n)$ の中心と一致する．

(2) $\mathrm{Spin}(2m)$ は $PO(2m)=SO(2m)/\{\pm I_{2m}\}$ の普遍被覆空間で，その被覆度数は 4 であるから，$\mathrm{Spin}(2m)$ の中心は位数 4 の部分群を含む．一方 $\mathrm{Spin}(2m)$ の中心は $p: \mathrm{Spin}(2m)\to SO(2m)$ により $SO(2m)$ の中心へ写され，$\mathrm{Ker}\, p\cong \boldsymbol{Z}_2$ であるから，$\mathrm{Spin}(2m)$ の中心は位数 4 の群，$\boldsymbol{Z}_2\oplus\boldsymbol{Z}_2$ または $\boldsymbol{Z}_4$, でなければならない．ここで，$-I_{2m}$ の逆像 $p^{-1}(-I_{2m})$ の元の位数が 2 であるか 4 であるかに従って，中心は $\boldsymbol{Z}_2\oplus\boldsymbol{Z}_2$ あるいは $\boldsymbol{Z}_4$ と同型となる．

$w: I\to SO(2m) \Longleftrightarrow w(t)=\boldsymbol{r}(e^{\pi it})\oplus\cdots\oplus\boldsymbol{r}(e^{\pi it})$ とおくと，道 w のホモトピー類は $\mathrm{Spin}(2m)$ の元と見てよい（定理 1.13 の証明参照）．$p[w]=w(1)=-I_{2m}$ であるから，$[w]^2$ を調べればよい．$[w]^2$ は閉道 $u: I\to SO(2m) \Longleftrightarrow u(t)=\boldsymbol{r}(e^{2\pi it})\oplus\cdots\oplus\boldsymbol{r}(e^{2\pi it})$ で表わされる．この $u(t)$ の定義で，j 番目以外の項を I_2 でおきかえたものを u_j とすると，$u=u_1\cdots u_m$ で，しかも各閉道 $[u_j]$ が $\pi_1(SO(2m))$ の生成元であることが容易にわかる．いいかえると，$\mathrm{Ker}\, p$ の生成元を α とするとき，$[w]^2=[u]=[u_1]\cdots[u_m]=\alpha^m$. 従って，$m$ が偶数ならば $[w]$ の位数は 2，m が奇数ならば $[w]$ の位数は 4 となり，(2) は証明された． （終）

この定理から，spinor 群の商空間としてえられる被覆群はそれ自身の外に，$\mathrm{Spin}(2n+1)$ に対しては $SO(2n+1)$, $\mathrm{Spin}(4n+2)$ に対しては $SO(4n+2)$,

$PO(4n+2)$ しかない．しかし，Spin(4n) に対しては，$SO(4n)$，$PO(4n)$ の外にも可能性が2つある．

定理 4.15　Spin(4n) の中心に含まれる位数2の部分群で相異なるものを Ker p, A, A' とするとき，Spin(4n)/A と Spin(4n)/A' は同型である．

［証明］　Spin(4n)の自己同型で A を A' へ写すものがあればよい．実際 $(-1)\oplus I_{4n-1}\in O(4n)$ による $SO(4n)$ の変換は $SO(4n)$ の道，従って Spin(4n) の変換をひきおこす．そのとき，定理 4.14 の証明における w は $w'(t)=\boldsymbol{r}(e^{-\pi it})\oplus\boldsymbol{r}(e^{\pi it})\oplus\cdots\oplus\boldsymbol{r}(e^{\pi it})$ に写され，$w*w'=u_2\cdots u_{2n}\Longrightarrow[w']=[w]\cdot\alpha\neq[w]$となる．これは $[w]$ で生成される A を $[w']$ で生成される A' へ写す Spin(4n) の自己同型の存在を示している．　　(終)

定義　この定理で定まる Lie 群 Spin(4n)/A を **semi-spinor 群**といい $Ss(4n)$ で表わす．

$Ss(4n)$ と $SO(4n)$ は $n\neq2$ のときは同型でなく，$Ss(8)$ と $SO(8)$ は同型であることが知られている．

位相群の局所同型

補題 4.16　G, G' を位相群，Uを G における単位元の近傍，$f: U\to G'$ を写像で x, y, $xy\in U\Longrightarrow f(x)f(y)=f(xy)$ をみたすものとする．G が 1-連結であれば，f は G 全体からの位相群の準同型 $\bar{f}: G\to G'$ に一意的に拡張できる．

［証明］　G の元 x をとり，単位元 e と x を結ぶ道 $w: I\to G$ を考える．I を次のような条件をみたす小区間 $[t_i, t_{i+1}]$, $0=t_0<t_1<\cdots<t_n=1$, に分割する：$s, t\in[t_i, t_{i+1}]\Longrightarrow w(s)^{-1}w(t)\in U$. $V^{-1}V\subset U$ となる e の近傍 V をとり，I を $\{w^{-1}(L_gV),\ g\in G\}$ で被覆する．I はコンパクトであるから，十分細かい分割をとれば，各 $[t_i, t_{i+1}]$ はある $w^{-1}(L_gV)$に含まれる．このとき，s, $t\in[t_i, t_{i+1}]$ について，$w(s)=gv_1$, $w(t)=gv_2$ $(v_1, v_2\in V)\Longrightarrow w(s)^{-1}w(t)=v_1^{-1}v_2\in V^{-1}V\subset U$. よって，上のような分割が存在する．このような分割について，

$$\bar{f}_w(x)=f(w(t_1))f(w(t_1)^{-1}w(t_2))\cdots f(w(t_{n-1})^{-1}w(t_n))$$

と定義する．いま，分点 $t'\in(t_i, t_{i+1})$ をつけ加えた分割について考える．$w(t_i)^{-1}$, $w(t')$, $w(t')^{-1}w(t_i)\in U$ であるから，定理の仮定より，$f(w(t_i)^{-1}w(t'))f(w(t')^{-1}w(t_{i+1}))=f(w(t_i)^{-1}w(t_{i+1}))$. これは，$\bar{f}_w(x)$が分割の細分で変わらぬこ

とを示している．2つの分割については，共通の細分を考えればよいから，$\bar{f}_w(x)$ は分割のとり方によらずに定まることがわかる．

他の元 $y \in G$ についても，e と y を結ぶ道 u によって $\bar{f}_u(y)$ が定義される．このとき，x と xy を結ぶ道 v を $v(t)=\bar{f}_w(x)u(t)$ で与えるとき明らかに

$$\bar{f}_w(x)\bar{f}_u(y)=\bar{f}_{w*v}(xy)$$

が成り立つ．

次に，$\bar{f}_w(x)$は道 w のとり方によらずに定まることを示そう．G は1-連結であるから，e と x を結ぶ他の道 w' について，$w \simeq w'$．$W: I\times I \to G$ を $w \simeq w'$ を示すホモトピーとする．前と同様に $I\times I$ を一辺 $1/n$ の十分小さい正方形に細分して，$t, t' \in [j/n,\ j+1/n]$，$s, s' \in [j/n,\ j+1/n] \Longrightarrow W(s,t)^{-1}W(s', t') \in U$ にとれる．$w_i(t)=W(t,\ i/n)$ とおくとき，$\bar{f}_{w_{i+1}}(x)=\bar{f}_{w_i}(x)$ であることが定理の仮定を使って証明される．よって，$\bar{f}_w(x)=\bar{f}_{w_0}(x)=\bar{f}_{w_n}(x)=\bar{f}_{w'}(x)$．即ち，$\bar{f}_w(x)$ は w に無関係にきまり，これを $\bar{f}(x)$ と書けば，上のことから，

$$\bar{f}(x)\bar{f}(y)=\bar{f}(xy)$$

$\bar{f}$ の連続性は f の連続性と位相群の積，逆元の連続性よりえられる．また，G は U で生成されるから $\bar{f}$ は一意的に定まる f の拡張である． (終)

系 4.17 補題4.16において，G, G' は Lie 群，f は微分可能ならば，$\bar{f}$ は微分可能で，Lie 群の準同型となる．

定義 位相群 G と G' は**局所同型**$\Longleftrightarrow G$ と G' の単位元の近傍 U, U' と同相写像 $f: U \cong U'$ があって，x, y, $xy \in U \Longrightarrow f(x)f(y)=f(xy)$．

Lie 群 G と G' は**局所同型**$\Longleftrightarrow$上の f は微分同相．

(4.18) 局所同型は同値関係である．また被覆群 $(\tilde{G}, p, G)$ において $\tilde{G}$ と G は局所同型である．

定理 4.19 位相群（または Lie 群）G, G' が1-連結であるとき，

G と G' は局所同型$\Longleftrightarrow G$ と G' は同型．

［証明］ 局所同型を与える $f: U \cong U'$ について，$f: U \to G'$ と $f^{-1}: U' \to G$ を考えると，これらは準同型 $\bar{f}: G \to G'$ と $\overline{f^{-1}}: G' \to G$ に拡張される．$\overline{f^{-1}} \circ \bar{f}: G \to G$ と 1_G を比較すると，これらは共に射入 $U \to G$ の拡張である．拡張の一意性より，$\overline{f^{-1}} \circ \bar{f}=1_G$．同様に $\bar{f} \circ \overline{f^{-1}}=1_{G'}$．よって G と G' は同型である．

逆は明らか． (終)

系 4.20　連結な Lie 群 G, G' について，$\tilde{G}$, $\tilde{G}'$ をそれらの普遍被覆群とするとき，

$$G \text{ と } G' \text{ は局所同型} \Longleftrightarrow \tilde{G} \text{ と } \tilde{G}' \text{ は同型.}$$

§5　Lie 群と Lie 環

Lie 環の定義

$\boldsymbol{k}=\boldsymbol{R}$ または $\boldsymbol{k}=\boldsymbol{C}$ とする.

定義　$\mathfrak{g}$ が $\boldsymbol{k}$ 上の **Lie 環**(**実 Lie 環**または**複素 Lie 環**)である

$\Longleftrightarrow$ $\mathfrak{g}$ は次の性質(1), (2), (3)をみたす積

$$[\ ,\ ]: \mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$$

をもつ $\boldsymbol{k}$ 上のベクトル空間である：

(1)（歪対称性）$[Y, X]=-[X, Y]$, 従って $[X, X]=0$

(2)（線型性）$[aX+a'X', Y]=a[X, Y]+a'[X', Y]$, $(a, a'\in\boldsymbol{k})$

(3)（Jacobi 恒等式）$[X, [Y, Z]]+[Y, [Z, X]]+[Z, [X, Y]]=0$

特に断らない限り，Lie 環はすべて有限次元とする.

記号　$\boldsymbol{k}$ 上の Lie 環 $\mathfrak{g}$ の部分ベクトル空間 $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ について,

$$[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]=\{[X, Y]\mid X\in\mathfrak{a},\ Y\in\mathfrak{b}\}$$

定義　$\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}'$ を $\boldsymbol{k}$ 上の Lie 環とする.

$\mathfrak{h}$ が $\mathfrak{g}$ の**部分 Lie 環** $\Longleftrightarrow$ $\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ の部分ベクトル空間かつ $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]\subset\mathfrak{h}$.

$\mathfrak{a}$ が $\mathfrak{g}$ の**イデアル** $\Longleftrightarrow$ $\mathfrak{a}$ は $\mathfrak{g}$ の部分 Lie 環かつ $[\mathfrak{g}, \mathfrak{a}]\subset\mathfrak{a}$.

$\mathfrak{g}$ は**可換 Lie 環** $\Longleftrightarrow$ $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]=0$.

$\varphi: \mathfrak{g}\to\mathfrak{g}'$ が Lie 環の**準同型** $\Longleftrightarrow$ φ は線型写像かつ $\varphi[X, Y]=[\varphi(X), \varphi(Y)]$,
$X, Y\in\mathfrak{g}$, をみたす.

$\varphi: \mathfrak{g}\to\mathfrak{g}'$ が Lie 環の**同型** $\Longleftrightarrow$ φ は全単射かつ Lie 環の準同型.

$\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{g}'$ は**同型** $\Longleftrightarrow$ Lie 環の同型 $\varphi: \mathfrak{g}\to\mathfrak{g}'$ がある.

次のことは容易にわかる.

(5.1)　$\varphi: \mathfrak{g}\to\mathfrak{g}'$ が Lie 環の準同型 $\Longrightarrow$ $\mathrm{Im}\,\varphi=\varphi(\mathfrak{g})$ は $\mathfrak{g}'$ の部分 Lie 環,
$\mathrm{Ker}\,\varphi=\varphi^{-1}(0)$ は $\mathfrak{g}$ のイデアル.

(5.1)′　$\mathfrak{a}$ を Lie 環 $\mathfrak{g}$ のイデアルとするとき，商ベクトル空間 $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ には射影

$\pi:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ が Lie 環の準同型となるような Lie 環の構造が一意的に入る．($\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ を**商環**という)．(5.1)において，$\mathfrak{g}/\mathrm{Ker}\,\varphi\cong\mathrm{Im}\,\varphi$ (同型)．

(5.2) $\boldsymbol{k}$ 上の有限次元ベクトル空間 V について，$\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{k}}(V, V)$ において $[f, g]=f\circ g-g\circ f$ $(f, g: V\to V)$ とおけばこれは $\boldsymbol{k}$ 上の Lie 環になる．これを $\mathfrak{gl}(V)$ で表わす．V の基底を定めて，$\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{k}}(V, V)$ を正方行列全体 $M(n, \boldsymbol{k})$ と同一視すれば $M(n, \boldsymbol{k})$ は $[A, B]=AB-BA$ によって Lie 環となる．これを $\mathfrak{gl}(n, \boldsymbol{k})$ で表わす．

$\boldsymbol{k}$ 上の Lie 環 $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}'$ に対して，ベクトル空間としての直和 $\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}'$ を考え，そこにおける積を

$$[(X, X'), (Y, Y')]=([X, Y], [X', Y']),\quad X, Y\in\mathfrak{g},\quad X', Y'\in\mathfrak{g}'$$

で定義したものを，Lie 環 $\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{g}'$ の**直和**といい，$\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}'$ で表わす．

(5.3) Lie 環 $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}'$ の直和 $\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}'$ において，$\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}'$ はイデアルで，$(\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}')/\mathfrak{g}\cong\mathfrak{g}'$ である．$\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}'\cong{}'\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}$, $(\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}')\oplus\mathfrak{g}''\cong\mathfrak{g}\oplus(\mathfrak{g}'\oplus\mathfrak{g}'')$ (同型)．逆に Lie 環 $\mathfrak{g}$ のイデアル $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$ があって，$\mathfrak{g}=\mathfrak{a}+\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{a}'=0$ ならば，$\mathfrak{g}=\mathfrak{a}\oplus\mathfrak{a}'$．

定義 Lie 環 $\mathfrak{g}$ は**単純** $\Longleftrightarrow$ $\mathfrak{g}$ は可換ではなく，0 および $\mathfrak{g}$ 以外にイデアルをもたない．

Lie 環 $\mathfrak{g}$ は**半単純** $\Longleftrightarrow$ $\mathfrak{g}$ はいくつかの単純 Lie 環の直和．

Lie 環論の詳しいことは，良書も多くあることであるから省略して，必要に応じて結果を引用することにしたい．

接ベクトル場のなす Lie 環

第1章，§5 では，微分多様体の接ベクトル場 $\boldsymbol{v}$ は切断

$$\boldsymbol{v}: M\to TM\ (C^\infty\text{-写像}),\quad p\circ\boldsymbol{v}=1_M$$

で定義された．接ベクトル空間 TM における，ベクトルの和およびスカラー積は C^∞-写像であるから，接ベクトル場 $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v}'$ の和およびスカラー積が

$$(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}')(x)=\boldsymbol{v}(x)+\boldsymbol{v}'(x),\quad (a\boldsymbol{v})(x)=a\boldsymbol{v}(x),\quad a\in\boldsymbol{R}$$

によって定義され，接ベクトル場全体は(無限次元)実ベクトル空間をなす．

ここでは，接ベクトル場を他の方法で見直すことにする．

$C(M)=\{f\,|\,C^\infty\text{-写像}\ f: M\to\boldsymbol{R}\}$ は

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x),\quad (af)(x)=af(x),\quad (fg)(x)=f(x)g(x)$$

によって，$\boldsymbol{R}$ 上の(無限次元)多元環となる．

定義　$X: C(M)\to C(M)$ は微分多様体 M における**微分作用素**

$\Longleftrightarrow X$ は線型写像かつ $X(fg)=X(f)g+fX(g)$ をみたす．

記号　$\mathfrak{X}(M)=\{M$ における微分作用素$\}$

(5.4)　$\mathfrak{X}(M)$は，$(X+Y)(f)=X(f)+Y(f)$，$(aX)(f)=aX(f)$，$[X, Y](f)=X(Yf)-Y(Xf)$ によって(無限次元)Lie 環をなす．さらに，$(fX)(g)=f(X(g))$ によって，$\mathfrak{X}(M)$は $C(M)$-左加群をなす．

$C(M)$ の元である C^∞-写像 $f: M\to\boldsymbol{R}$ は，接バンドル空間のバンドル写像 $df: TM\to T\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}$ を誘導する．M の接ベクトル場 $\boldsymbol{v}: M\to TM$ とこの f について，

$$X_{\boldsymbol{v}}(f)=\pi_2\circ df\circ\boldsymbol{v}: M\longrightarrow TM\longrightarrow T\boldsymbol{R}\longrightarrow\boldsymbol{R}$$

と定義する．ただし，$\pi_2: T\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ は第2成分への射影であり，

$$(df\circ\boldsymbol{v})(x)=(f(x),\ X_{\boldsymbol{v}}(f)(x)),\quad x\in M$$

によって，$X_{\boldsymbol{v}}: C(M)\to C(M)$ が定義されると思ってよい．

定理 5.5　対応 $\boldsymbol{v}\to X_{\boldsymbol{v}}$ は，M における接ベクトル場全体のなす実ベクトル空間から，微分作用素のなす実ベクトル空間 $\mathfrak{X}(M)$ の上への同型対応である．(このことによって，微分作用素 $X\in\mathfrak{X}(M)$ を M における接ベクトル場と定義することができる．)

［証明］ $C(M)$ は $(f\boldsymbol{v})(x)=f(x)\boldsymbol{v}(x)$ によって接ベクトル場に作用している．パラコンパクト Hausdorff 空間である微分多様体 M の座標近傍系に関する1の分割 $\{\varepsilon_\alpha\}$ は $\varepsilon_\alpha\in C(M)$ にとることができる．接ベクトル場 $\boldsymbol{v}$ と $X\in\mathfrak{X}(M)$ について，$\boldsymbol{v}=\sum_\alpha\varepsilon_\alpha\boldsymbol{v}$，$X=\sum_\alpha\varepsilon_\alpha X$ を考えることによって，定理 5.5 は，その各座標近傍で考えれば十分であることがわかる．即ち，$M=\boldsymbol{R}^m$ の場合に定理を証明すれば十分である．

$\boldsymbol{R}^m$ における接ベクトル場 $\boldsymbol{v}: \boldsymbol{R}^m\to T\boldsymbol{R}^m=\boldsymbol{R}^m\times\boldsymbol{R}^m$ は

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{x},\ (v_1(\boldsymbol{x}),\ \cdots,\ v_m(\boldsymbol{x}))),\quad v_1,\ \cdots,\ v_m\in C(\boldsymbol{R}^m)$$

と表わされる．また，$f\in C(\boldsymbol{R}^m)$ に対して，$df: T\boldsymbol{R}^m\to T\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}$ は，

$$df(\boldsymbol{x},\ (a_1,\ \cdots,\ a_m))=\left(f(\boldsymbol{x}),\ a_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x})+\cdots+a_m\frac{\partial f}{\partial x_m}(\boldsymbol{x})\right)$$

で与えられるから，$X_{\boldsymbol{v}}$ は，

$$X_v f(\boldsymbol{x})=\sum_{i=1}^{m} v_i(\boldsymbol{x})\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})$$

で与えられる．X_v が微分作用素であることは，この式から明らかである．さらにこの式は，$\mathfrak{X}(\boldsymbol{R}^m)$ が $C(\boldsymbol{R}^m)$ 上の加群として，$\{\partial/\partial x_1, \cdots, \partial/\partial x_m\}$ を基底にもつ(証明略)ことから，定理が導かれることを示している．（終）

(5.6)　$h: M\to M'$ を C^∞-写像，$\boldsymbol{v}: M\to TM$，$\boldsymbol{v}': M'\to TM'$ を接ベクトル場とし，定理 5.5 によって，$\boldsymbol{v}\to X\in\mathfrak{X}(M)$，$\boldsymbol{v}'\to X'\in\mathfrak{X}(M')$ と対応しているとするとき，

$$dh\circ\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}'\circ h \Longleftrightarrow X'(f')\circ h=X(f'\circ h)\quad (\forall f'\in C(M'))$$

$\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{v}'$ が上のような関係にあるとき，$\boldsymbol{v}'$ は $\boldsymbol{v}$ と h で定まるから，

$$\boldsymbol{v}'=h_*\boldsymbol{v},\qquad X'=h_*X$$

のように表示することができる．このような h_* の定義される $X, Y\in\mathfrak{X}(M)$ に対して，次の等式が成り立つ：

(5.7)　$h_*(aX+bY)=ah_*X+bh_*Y\quad (a, b\in\boldsymbol{R})$

$h_*[X, Y]=[h_*X, h_*Y]$

特に，

(5.7)′　h：微分同相 $\Longrightarrow h_*: \mathfrak{X}(M)\cong\mathfrak{X}(M')$ (Lie 環の同型)

Lie 群と Lie 環

G を Lie 群とする．G における接ベクトル場 $\boldsymbol{v}: G\to TG$ とそれに対応する微分作用素 $X\in\mathfrak{X}(G)$ について，

$\boldsymbol{v}$ は左不変ベクトル場 $\Longleftrightarrow L_g\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}\ (\forall g\in G) \Longleftrightarrow L_{g*}X=X\ (\forall g\in G)$

従って，(5.7)によって

$$\mathfrak{g}=\{X\in\mathfrak{X}(G)\mid L_{g*}X=X\ (\forall g\in G)\}$$

は $\mathfrak{X}(G)$ の部分 Lie 環をなす．

一方，第1章，§5において次の1対1対応が与えられている：

$\{$左不変ベクトル場 $\boldsymbol{v}\}\leftrightarrow\{e$ における接ベクトル $X=\boldsymbol{v}(e)\in T_eG\}$

$\leftrightarrow\{1$ 助変数部分群 $s: \boldsymbol{R}\to G,\ s(t)=\exp(tX)\}$

従って，定理 5.5 の対応により，

(5.8)　ベクトル空間の同型 $T_eG\cong\mathfrak{g}$ がある．

この同型によって，$T_eG=\mathfrak{g}$ と考え，T_eG も Lie 環の構造をもつものとする.

定義　$\mathfrak{g}=T_eG$ を Lie 群 G の **Lie 環**といい，$L(G)=\mathfrak{g}=T_eG$ で表わす.

$h:G\to G'$ を Lie 群の準同型とし，$dh:TG\to TG'$ を考える.

$\boldsymbol{v}:G\to TG$ を左不変ベクトル場とするとき，$dh(\boldsymbol{v}(e))\in T_eG'$ で定まる G' における左不変ベクトル場 $\boldsymbol{v}'$ が $\boldsymbol{v}'(g')=dL_{g'}(dh(\boldsymbol{v}(e)))$ で与えられる．$g'=h(g)$ のとき，$\boldsymbol{v}'(h(g))=dL_{h(g)}dh(\boldsymbol{v}(e))=dhdL_g(\boldsymbol{v}(e))=dh(\boldsymbol{v}(g))$．即ち，$\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{v}'$ は (5.6) の関係をみたし，$\boldsymbol{v}'=h_*\boldsymbol{v}$ である．よって，(5.6) および (5.7) より，

(5.9)　$h:G\to G'$ を Lie 群の準同型とするとき，$h_*:L(G)\to L(G')$ は Lie 環の準同型である．特に，H が Lie 群 G の部分 Lie 群であれば $L(H)$ は $L(G)$ の部分 Lie 環である．

Lie 群 G の元 g による内部自己同型を

$$A_g:G\longrightarrow G\Longleftrightarrow A_g(x)=gxg^{-1},\quad x\in G$$

とし，A_g で誘導される Lie 環 $\mathfrak{g}=L(G)$ の自己同型を

$$Ad(g)=(A_g)_*:\mathfrak{g}\longrightarrow\mathfrak{g}$$

で表わす．明らかに，

$$A_{gg'}=A_g\circ A_{g'}\Longrightarrow Ad(gg')=Ad(g)\circ Ad(g')$$

$\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ を Lie 環 $\mathfrak{g}$ の自己同型全体のなす群とする．$\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ は，$GL(\mathfrak{g})\cong GL(\dim G,\ \boldsymbol{R})$ の閉部分群であるから，Lie 群である．

定理 5.10　$Ad:G\to GL(\mathfrak{g})$ は Lie 群の準同型である．即ち，Ad は Lie 環 $\mathfrak{g}=L(G)$ による Lie 群 G の表現である．

定義　上の Ad を Lie 群 G の**随伴表現**という．

定義　Lie 環 $\mathfrak{g}$ の**表現**$\Longleftrightarrow\mathfrak{g}$ から行列のつくる Lie 環への Lie 環としての準同型.

定義　G の随伴表現 $Ad:G\to GL(\mathfrak{g})$，$\mathfrak{g}=L(G)$，の微分を考えることにより，Lie 環の準同型 $\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})=M(n,\ \boldsymbol{R})$，$n=\dim G$，をえるが，これを

$$ad:\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})=M(n,\ \boldsymbol{R})$$

と表わし，$\mathfrak{g}$ の**随伴表現**という．即ち，$X,\ Y\in\mathfrak{g}$ に対して

$$ad([X,\ Y])=[adX,\ adY]$$

$$Ad(\exp X)=\exp ad(X)$$

さらに,

$$ad(X)Y=[X,\ Y]$$

であることがわかる((5.15)参照).

定理 5.11 (**Ado**)　$\boldsymbol{k}$ は標数 0 の体とする. このとき, $\boldsymbol{k}$ 上の有限次元 Lie 環 $\mathfrak{g}$ は忠実な($\Longleftrightarrow$単射準同型)有限次元の表現をもつ.

ある群が忠実な表現をもてば, それは行列のつくる群の部分群に同型であるから, 上の定理の系として,

定理 5.11′　$\boldsymbol{k}=\boldsymbol{R}$ または $\boldsymbol{C}$ とする. $\boldsymbol{k}$ 上の有限次元 Lie 環 $\mathfrak{g}$ に対して, 整数 $n\geq 1$ と $GL(n,\ \boldsymbol{k})$ の(連結な)Lie 部分群 G が存在して, G の Lie 環は $\mathfrak{g}$ に同型である.

Lie 群 G の Lie 環 $\mathfrak{g}=L(G)$ は G の単位元の近傍の状態のみによって定まる. 従って, Lie 環 $L(G)$ は G の単位元の成分 G_0 の Lie 環 $L(G_0)$ と一致し, G' と G が局所同型(特に被覆群)であれば, それらの Lie 環は同型である. このような, Lie 環と局所的に見た Lie 群が 1 対 1 に対応するというのが, 有名な Lie の理論である. ここでは, 証明なしに, その結果のみを引用する(村上[6], 松島 [11], [11]′ 参照).

定理 5.12　G を Lie 群, $\mathfrak{g}=L(G)$ をその Lie 環とするとき, G の連結部分 Lie 群 H と $\mathfrak{g}$ の部分 Lie 環 $\mathfrak{h}$ の間には 1 対 1 対応がある((5.9) 参照). さらに,

$$H \text{ は正規} \Longleftrightarrow \mathfrak{h} \text{ はイデアル},$$

$$H \text{ は可換} \Longleftrightarrow \mathfrak{h} \text{ は可換}.$$

定理 5.13　G は 1-連結 Lie 群, G' を Lie 群とするとき, Lie 群の準同型 $f:G\rightarrow G'$ に, その誘導する Lie 環の準同型 $f_*:L(G)\rightarrow L(G')$ を対応させる対応は 1 対 1 である.

系 5.13′　上の定理において, $f_*:L(G)\cong L(G')$ ならば $(G,\ f,\ G')$ は普遍被覆群である.

注意　G の連結正規部分群 H に対応する $\mathfrak{g}=L(G)$ のイデアル $\mathfrak{h}$ について, 商 Lie 環 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ を考える. 定理 5.11′ によって $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}=L(G')$ となる Lie 群 G' がある. G が 1-連結であれば, 準同型 $f:G\rightarrow G'$ があって, $H=\mathrm{Ker}\,f$ となる.

このことから,

(5.14) 1-連結 Lie 群の連結部分 Lie 群が正規ならば，それは閉部分群である．

Lie 環の積［ , ］は指数写像 exp : $L(G)=T_eG\to G$ を用いて，以下のように表わすことができる．

(5.15) $X, Y\in L(G)$について，

$$[X,\ Y]=\frac{d}{dt}(Ad(\exp tX)Y)_{t=0}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\{Ad(\exp tX)Y-Y\}.$$

定理 5.16 Lie 群 $GL(n,\ \boldsymbol{F})$ の Lie 環は，$M(n,\ \boldsymbol{F})$ において積を $[A,\ B]=AB-BA$ で与えたものである．従って，$GL(n,\ \boldsymbol{F})$ の閉部分群(である古典群) G の Lie 環 $\mathfrak{g}=\{A\in M(n,\ \boldsymbol{F})\,|\,\mathrm{ext}(tA)\in G,\ \forall t\in\boldsymbol{R}\}$ は上の積による Lie 環である．

低次元の spinor 群

記号 $E_{ij}=((i,\ j)$-成分$=1$，その他の成分$=0$ の正方行列$)\in M(n,\ \boldsymbol{F})$

$L(U(n,\ \boldsymbol{F}))=\{A\in M(n,\ \boldsymbol{F})\,|\,{}^tA=-\overline{A}\}$

$L(SU(n,\ \boldsymbol{F}))=\{A\in M(n,\ \boldsymbol{F})\,|\,{}^tA=-\overline{A},\ \mathrm{tr}A=0\}$

であるから，次の結果が容易にえられる．

定理 5.17 古典群の Lie 環は次のような $\boldsymbol{R}$ 上の基底をもつ：

$L(O(n))=L(SO(n)) : \{E_{ij}-E_{ji};\ 1\leq i<j\leq n\}$

$L(U(n)) : \{E_{ij}-E_{ji};\ 1\leq i<j\leq n\}\cup\{\boldsymbol{i}(E_{ij}+E_{ji});\ 1\leq i\leq j\leq n\}$

$L(SU(n)) : \{E_{ij}-E_{ji},\ \boldsymbol{i}(E_{ij}+E_{ji});\ 1\leq i<j\leq n\}$
$\cup\{\boldsymbol{i}(E_{ii}-E_{i+1,i+1});\ 1\leq i<n\}$

$L(Sp(n)) : \{E_{ij}-E_{ji};\ 1\leq i<j\leq n\}$
$\cup\{\alpha(E_{ij}+E_{ji});\ 1\leq i\leq j\leq n,\ \alpha=\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$

これらの Lie 環における積 $[A,\ B]=AB-BA$ は次を使って計算される．

(5.17)′ $E_{ij}E_{jk}=E_{ik},\ E_{ij}E_{lk}=0\ (j\neq l)$

例えば，$L(SO(n))$ において，

$$R_{ij}=E_{ij}-E_{ji}\ (R_{ji}=-R_{ij},\ R_{ii}=0)$$

とおけば，$L(SO(n))$ における積は

$$[R_{ij},\ R_{jk}]=R_{ik}\quad(i\neq j,\ j\neq k)$$

$$[R_{ij},\ R_{kl}]=0 \quad (i,\ j,\ k,\ l \text{ は互いに異なる})$$

で与えられる．($\exp tR_{ij}$ は $(i,\ j)$-平面における角度 t の回転である．)

一方，$L(Sp(1))$ は基底 $\{\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k}\}$ をもち，積は

$$[\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j}]=2\boldsymbol{k},\ [\boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k}]=2\boldsymbol{i},\ [\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{k}]=-2\boldsymbol{j}$$

で与えられるから，対応 $2R_{12}\to\boldsymbol{i}$，$2R_{13}\to\boldsymbol{j}$，$2R_{23}\to-\boldsymbol{k}$，によって，

(5.18) $L(SO(3))\cong L(Sp(1))$．従って (2 重) 普遍被覆 $p: Sp(1)\to SO(3)$ があり，$\mathrm{Spin}(3)\cong Sp(1)$ (補題 4.11 参照)．

また，対応 $\varphi_4: L(SO(4))\to L(Sp(1))\oplus L(Sp(1))$ を

$$\varphi_4(2R_{12})=(\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{i}),\quad \varphi_4(2R_{13})=(\boldsymbol{j},\ \boldsymbol{j}),\quad \varphi_4(2R_{23})=(-\boldsymbol{k},\ -\boldsymbol{k}),$$

$$\varphi_4(2R_{14})=(-\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}),\ \varphi_4(2R_{24})=(-\boldsymbol{j},\ \boldsymbol{j}),\ \varphi_4(2R_{34})=(\boldsymbol{i},\ -\boldsymbol{i})$$

で与えると，これは Lie 環の同型を与えることが容易に確かめられる．よって

(5.19) $L(SO(4))\cong L(Sp(1)\times Sp(1))$，$\mathrm{Spin}(4)\cong Sp(1)\times Sp(1)$ および，2 重被覆写像 p と，対角写像 d および射入 $i(A)=A\oplus 1$ からなる，右の可換な図式がえられる．

$$\begin{array}{ccc} Sp(1) & \xrightarrow{\ d\ } & Sp(1)\times Sp(1) \\ \downarrow p & & \downarrow p \\ SO(3) & \xrightarrow{\ i\ } & SO(4) \end{array}$$

(5.19)′ $Ss(4)\cong(Sp(1)/\boldsymbol{Z}_2)\times Sp(1)\cong SO(3)\times Sp(1)$

対応 $(A,\ B)\to A\oplus B$ によって，$Sp(1)\times Sp(1)\subset Sp(2)$ と考える．

定理 5.20 右の図式が可換となるような普遍被覆 $p: Sp(2)\to SO(5)$ がある．従って，$\mathrm{Spin}(5)\cong Sp(2)$．

$$\begin{array}{ccc} Sp(1)\times Sp(1) & \longrightarrow & Sp(2) \\ \downarrow p & & \downarrow p \\ SO(4) & \xrightarrow{\ i\ } & SO(5) \end{array}$$

［証明］ 上の φ_4 の拡張 $\varphi_5: L(SO(5))\to L(Sp(2))$ を残りの基底 $R_{i5}(i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ に対して次のように定める．$\tilde{R}=E_{12}+E_{21}$ とするとき，

$$\varphi_5(2R_{15})=\boldsymbol{k}\tilde{R},\ \varphi_5(2R_{25})=\boldsymbol{j}\tilde{R},\ \varphi_5(2R_{35})=-\boldsymbol{i}\tilde{R}$$

$$\varphi_5(2R_{45})=E_{21}-E_{12}.$$

φ_5 が Lie 環の準同型であることは直接確かめられるから，φ_5 は Lie 環の同型である．定理はこれから直ちにえられる． (終)

$$\boldsymbol{c}': M(2,\ \boldsymbol{H})\longrightarrow M(4,\ \boldsymbol{C})\Longleftrightarrow \boldsymbol{c}'(A+\boldsymbol{j}B)=\begin{pmatrix} A & -\overline{B} \\ B & \overline{A} \end{pmatrix} \text{ によって}$$

$$\boldsymbol{c}': Sp(2)\subset SU(4),\ L(Sp(2))\subset L(SU(4))$$

と考える．

定理 5.21　右の図式が可換となるような普遍被覆 $p: SU(4) \to SO(6)$ がある．従って，

$$\mathrm{Spin}(6) \cong SU(4)$$

$$\begin{array}{ccc} Sp(2) & \xrightarrow{c'} & SU(4) \\ \downarrow p & & \downarrow p \\ SO(5) & \xrightarrow{i} & SO(6) \end{array}$$

［証明］　$L(SU(4))$ の基底を

$$X_{ij} = E_{ij} - E_{ji}, \quad Y_{ij} = \boldsymbol{i}(E_{ij} + E_{ji}) \quad (1 \leq i < j \leq 4),$$

$$T_1 = \boldsymbol{i}(E_{11} - E_{22}), \quad T_2 = \boldsymbol{i}(E_{22} - E_{33}), \quad T_3 = \boldsymbol{i}(E_{33} - E_{44})$$

で表わすとき，$\boldsymbol{c}' \circ \varphi_5 : L(SO(5)) \longrightarrow L(SU(4))$ は次の対応で与えられる：

$$2R_{12} \longrightarrow T_1 - 2T_2 + T_3, \quad 2R_{13} \longrightarrow -X_{13} - X_{24}, \quad 2R_{23} \longrightarrow Y_{13} + Y_{24},$$

$$2R_{14} \longrightarrow Y_{13} - Y_{24}, \quad 2R_{24} \longrightarrow X_{13} - X_{24}, \quad 2R_{34} \longrightarrow T_1 - T_3,$$

$$2R_{15} \longrightarrow -Y_{14} - Y_{23}, \quad 2R_{25} \longrightarrow -X_{14} - X_{23}, \quad 2R_{35} \longrightarrow -Y_{12} + Y_{34},$$

$$2R_{45} \longrightarrow -X_{12} - X_{34}$$

ここで，さらに残りの基底に対して，

$$2R_{16} \longrightarrow -X_{14} + X_{23}, \quad 2R_{26} \longrightarrow Y_{14} - Y_{23}, \quad 2R_{36} \longrightarrow -X_{12} + X_{34}$$

$$2R_{46} \longrightarrow Y_{12} + Y_{34}, \quad 2R_{56} \longrightarrow T_1 + T_3$$

と定義すれば，Lie 環の同型 $L(SO(6)) \cong L(SU(4))$ がえられることが確かめられる．従って定理がえられる．　　　　(終)

§6　分類空間

CW-複体

記号　$D^n = \{(t_1, \cdots, t_n) \in \boldsymbol{R}^n \mid \sum t_i^2 \leq 1\}$ ：**単位胞体**

D^n の境界は単位球面 $S^{n-1} = \{(t_1, \cdots, t_n) \in \boldsymbol{R}^n \mid \sum t_i^2 = 1\}$ である　$(\partial D^n = S^{n-1})$.

定義　位相空間 X の中の **n-胞体** $e^n \Longleftrightarrow$ (連続)写像 $\chi : D^n \to \bar{e}^n$　(e^n の閉包) があって，$\chi(S^{n-1}) = \partial e^n$ について，χ は $D^n - S^{n-1}$ から $e^n = \bar{e}^n - \partial e^n$ の上への同相を与える．χ を e^n の**特性写像**，∂e^n を e^n の**境界**という．

定義　K は**胞体分割** $\{e_\alpha\}$ をもつ**胞複体**

$\Longleftrightarrow$ (1)　K は Hausdorff 空間，$K = \bigcup_\alpha e_\alpha$,　$e_\alpha \cap e_\beta = \phi$　$(\alpha \neq \beta)$

(2)　e_α は n_α-胞体　($n_\alpha = \dim e_\alpha$ を e_α の**次元**という.)

(3)　$\partial e_\alpha \subset K^{n-1} = \bigcup_{\dim e_\beta \leq n-1} e_\beta$　(これを $(n-1)$-**切片**という.)

胞複体が**有限(可算)** $\Longleftrightarrow$ 胞体の個数が有限(可算).

L は K の**部分複体**$\Longleftrightarrow$$L$ は K の部分空間で，L に含まれる K の胞体全体を胞体分割として L は胞複体である．このとき，(K, L) を ***CW*-対**という．

(有限)多面体は有限胞複体である．有限胞複体はコンパクト Hausdorff 空間で，その位相は一意的に定まるが，有限でないときは一意的とは限らない．

定義　位相空間 X は部分空間の系 $\{X_\alpha\}$ に関して**弱位相**をもつ

$\Longleftrightarrow$$X$ は $\{X_\alpha\}$ に関して次の性質をもつ：

F が X の閉集合$\Longleftrightarrow$各 α につき $F\cap X_\alpha$ は X_α の閉集合．

定義　K は ***CW*-複体**$\Longleftrightarrow$$K$ は胞複体で，その胞体分割 $\{e_\alpha\}$ に関して，

(1)　(閉包有限性) 各 α につき，$\bar{e}_\alpha\cap e_\beta\neq\phi$ となる β は有限個，

(2)　K は $\{\bar{e}_\alpha\}$ に関して弱位相をもつ．

CW-複体に関する若干の性質を証明なしに引用する：

(6.1)　(1)　CW-複体の部分複体は閉部分空間かつ CW-複体．

(2)　CW-複体 K からの写像 $f: K\to X$ が連続$\Longleftrightarrow$$f|\bar{e}_\alpha$ が連続 $(\forall\alpha)$．

(3)　CW-複体は局所可縮(各点は可縮な近傍をもつ)．特に，局所弧状連結かつ局所半単連結で，その各成分は普遍被覆空間をもつ．

(4)　CW-複体はパラコンパクト，従って，正規空間である．

(6.2)　(1)　CW-対 (K, L) において，K, L が連結かつ $K-L$ の各胞体の次元 $>n$ ならば，(K, L) は n-連結．特に，$K^n=e^0$ (1 点) ならば K は n-連結である．

(2)　CW-対 (K, L) において，$K-L$ の各胞体の次元 $\leq n$ とする．X が $(n-1)$-連結であれば，任意の $f: L\to X$ は K に拡張できる．また，(X, A) が n-連結であれば，任意の $f: (K, L)\to(X, A)$ に対して，ホモトピー $f_t: (K, L)\to(X, A)$ で $f_0=f$, $f_1(K)\subset A$, $f_t|L=f|L$ をみたすものがある．

(3)　CW-対 (K, L) は**ホモトピー拡張性質**をもつ，即ち，任意の写像 $f: K\to X$ とホモトピー $g_t: L\to X$ が $f|L=g_0$ をみたすとき，ホモトピー $f_t: K\to X$ で，$f_0=f$, $f_t|L=g_t$ をみたすものが存在する．

定義　$f: X\to Y$ が**弱ホモトピー同値写像**

$\Longleftrightarrow$$f$ は弧状成分の全単射 $(f_*: \pi_0(X)\cong\pi_0(Y))$ で対応する各弧状成分 X_α, Y_α

について，$f_*: \pi_i(X_\alpha) \cong \pi_i(Y_\alpha)$　(同型 $\forall i$).

このとき，X と Y は**弱ホモトピー同値**であるという(これは必ずしも同値関係ではない).

X と Y がホモトピー同値であれば，それを与える写像は弱ホモトピー同値写像であることは明らかである．CW-複体ではこの逆がいえる.

(6.3)　(1)　(**J.H.C. Whitehead の定理**)　X, Y が CW-複体のとき，f: $X \to Y$ が弱ホモトピー同値写像ならば，$g: Y \to X$ が存在して $g \circ f \simeq 1_X$, $f \circ g \simeq 1_Y$，即ち，X と Y はホモトピー同値である.

(2)　任意の位相空間 X に対して，CW-複体 K と弱ホモトピー同値写像 $f: K \to X$ が存在する.

コンパクト微分多様体 M は三角形分割可能である．即ち，ある多面体 K との同相 $\varphi: K \cong M$ があって各単体上で φ は C^∞-写像である．ここで，M が他のコンパクト微分多様体 N の部分多様体であるとき，K を部分複体とする多面体 L と φ の拡張である同相 $L \cong N$ が存在する．例えば Morse の理論を使えば，L は K から何回かのハンドル体構成を行なってえられる．このようにして次の補題がえられる.

補題 6.4　$M_1 \subset \cdots \subset M_i \subset M_{i+1} \subset \cdots$ はコンパクト微分多様体の列で M_i は M_{i+1} の部分多様体とする．和集合 $\cup M_i$ に $\{M_i\}$ に関する弱位相を与えたものは CW-複体である.

n-普遍バンドル

定義　G-バンドル $\gamma = (E_\gamma, p_\gamma, B_\gamma, G)$ が **n-普遍**

$\Longleftrightarrow$　$K: CW$-複体，$\dim K \leq n$，$L: K$ の部分複体，$i: L \to K$ (射入)，
　$\xi = (E, p, K, G): G$-バンドル，バンドル写像 $h_L: i^\# \xi \to \gamma$ に対して，
　$h_L = h | i^\# E$ となるバンドル写像 $h: \xi \to \gamma$ が存在する.

補題 6.5　G-バンドル $\gamma = (E_\gamma, p_\gamma, B_\gamma, G)$ が n-普遍 $\Longleftrightarrow E_\gamma$ は $(n-1)$-連結.

[証明]　γ を n-普遍 G-バンドル，$f: S^m \to E_\gamma$ $(m < n)$，$\xi = \{D^{m+1} \times G, p, D^{m+1}, G\}$ を自明な G-バンドル，$i: S^m \to D^{m+1}$ を射入とし，$i^\# \xi = \{S^m \times G, p', S^m, G\}$ を考える．定理 2.9 の G の E_γ への作用を用いて，$h_L(x, g) = f(x) \cdot g$ とおけば，バンドル写像 $h_L: i^\# \xi \to \gamma$ がえられる．n-普遍の定義によって，h_L の

拡張 $h: D^{m+1}\times G\to E$ が存在する．$\bar{f}(x)=h(x, e)$, $x\in D^{m+1}$ とおけば $\bar{f}: D^{m+1}\to E_\gamma$ は f の拡張である．よって，E_γ は $(n-1)$-連結．

逆に，E_γ は$(n-1)$-連結とし，$K=L\cup e_\alpha$, $\dim e_\alpha\leq n$, について，バンドル写像 $h_L: i^\#\xi\to\gamma$ の拡張 $h:\xi\to\gamma$ があることを示そう．e_α の特性写像 $\chi_\alpha:(D^{m+1}, S^m)\to(K, L)$, $m<n$, で誘導されるバンドル写像 $\tilde{\chi}_\alpha:\chi_\alpha{}^\#\xi\to\xi$, $\tilde{\chi}_\alpha|S^m:(\chi_\alpha|S^m)^\#\xi\to i^\#\xi$ を考える．D^{m+1} は可縮であるから，D^{m+1} の恒等写像と定値写像の間のホモトピーに系 1.15 (2)を適用して，$\chi_\alpha{}^\#\xi\equiv(D^{m+1}\times G,\ p_1,\ D^{m+1}, G)$ は自明な G-バンドル．このとき，$h_L\circ(\tilde{\chi}_\alpha|S^m): S^m\times G\to E_\gamma$ は G の作用と可換であるから，$S^m\times e\to E_\gamma$ を E_γ の $(n-1)$-連結性で $D^{m+1}\times e$ に拡張し次に G の作用でバンドル写像 $\tilde{h}: D^{m+1}\times G\to E_\gamma$ に拡張できる．h_L の拡張 h は $p^{-1}(e_\alpha)$ の各点について $h=\tilde{h}\circ\tilde{\chi}_\alpha{}^{-1}$ とおいてえられる．一般の場合には $L\cup K^m$ から $L\cup K^{m+1}$ への拡張を上のように各胞体 e_α, $\dim e_\alpha=m+1$, について作れば，Kが弱位相をもつことを使って拡張の連続性が示される．　(終)

定理 6.6(**分類定理**)　$\gamma=(E_\gamma, p_\gamma, B_\gamma, G)$ を n-普遍 G-バンドル，K を CW-複体，$\dim K<n$ とする．任意の G-バンドル $\xi=(E, p, K, G)$ に対して，$\xi\equiv f^\#\gamma$ となる $f: K\to B_\gamma$ が存在し，$f\simeq g: K\to B_\gamma \Longleftrightarrow f^\#\gamma\equiv g^\#\gamma$.

［証明］ f の存在は n-普遍 G-バンドルの定義と定理2.4より明らか．系 2.15 (2)によって，$f\simeq g \Longrightarrow f^\#\gamma\equiv g^\#\gamma$．逆に $\xi=f^\#\gamma\equiv g^\#\gamma$ なら，$\xi\times I$ の $L=K\times 0\cup K\times 1$ での制限から $\tilde{f}$ と $\tilde{g}$ を使ってバンドル写像 $h_L: i^\#(\xi\times I)\to\gamma$ が定義される．$\dim(K\times I)\leq n$ であるから，h_L の拡張 $h:\xi\times I\to\gamma$ がある．このとき $\bar{h}: K\times I\to B_\gamma$ は $f\simeq g$ を示している．　(終)

定義　G が Fに効果的に作用しているとき，n-普遍 G-バンドル γ の同伴ファイバーバンドル $\gamma\times_G F$ を **n-普遍ファイバーバンドル**という．

系 6.7　G が Fに効果的に作用しているとき，それらを構造群，ファイバーにもつ n-普遍ファイバーバンドルについて，定理 6.6 と同様のことが成り立つ．

補題 6.8　G を $U(n, \boldsymbol{F})$ の閉部分群(例えば，G は古典群)とするとき，

$$(U(n+m,\ \boldsymbol{F})/1\times U(m,\ \boldsymbol{F}),\ p,\ U(n+m,\ \boldsymbol{F})/G\times U(m,\ \boldsymbol{F}), G)$$

は $(d(m+1)-2)$- 普遍 G-バンドルである．

［証明］ 定理 3.15 および補題 6.5 より明らかである．　(終)

同様に，線型 Lie 群についても次が成り立つ.

(6.9) G を $GL(m,\ \boldsymbol{F})$ の閉部分群(即ち線型 Lie 群)とするとき，

$$(GL(n+m,\ \boldsymbol{F})/1\times GL(m,\ \boldsymbol{F}), p,\ GL(n+m,\ \boldsymbol{F})/G\times GL(m,\ \boldsymbol{F}),\ G)$$

は $(d(m+1)-2)$- 普遍 G-バンドルである.

分類空間

定義 全空間が ∞- 連結である G- バンドルを $\gamma=(EG,\ p,\ BG,\ G)$ で表わし，**普遍 G-バンドル**という. 普遍 G-バンドルの底空間 BG を G の**分類空間**という. G が F に効果的に作用しているとき，普遍 G- バンドル γ の同伴ファイバーバンドル $\gamma\times_G F=(E,\ p,\ BG,\ F,\ G)$ を(ファイバー F と構造群 G をもつ)**普遍ファイバーバンドル**という.

この場合に系 6.7 をいい直せば次の定理となる.

定理 6.10 (分類定理) K を CW-複体, G は F に効果的に作用しているとするとき，(連続)写像 $f: K\to BG$ のホモトピー類と，K を底空間，F をファイバー，G を構造群とするファイバーバンドルの同値類とは，対応 $f\to f^{\#}(\gamma\times_G F)$ によって 1 対 1 対応にある. 一般に，K は CW-複体とホモトピー同値なパラコンパクト Hausdorff 空間にとってよい.

系 6.11 G の分類空間 BG で CW-複体(とホモトピー同値な空間)であるものは，ホモトピー同値の意味で一意的である.

$$G(1)\subset G(2)\subset\cdots\subset G(k)\subset G(k+1)\subset\cdots$$

を Lie 群の包含列で各 $G(k)$ は $G(k+1)$ の閉部分群とする. 和集合

$$G(\infty)=\bigcup_k G(k)$$

に $\{G(k)\}$ に関する弱位相を与えて位相空間とする. $G(\infty)$ が $G(k)$ の積によって位相群となることは容易にわかる.

各 k について，$H(k)$ は $G(k)$ の閉部分群で，

(6.12) $$H(k)=G(k)\cap H(k+1),\quad k=1,2,3,\cdots$$

をみたすものとする. このとき

(6.13) $$G(k)/H(k)\subset G(k+1)/H(k+1)$$

と考えることができる.

補題 6.14 自然な射入によって，$H(\infty)$ は $G(\infty)$ の部分群．$\bigcup_k G(k)/H(k)$ に弱位相を与えたものは $G(\infty)/H(\infty)$ と自然に同相である．また，射影 $p: G(\infty)\to G(\infty)/H(\infty)$ は局所切断をもつ．

［証明］ 集合として，$H(\infty)\subset G(\infty)$，$G(\infty)/H(\infty)=\bigcup_k G(k)/H(k)$ である．位相については，局所的に考えればよいから単位元の近傍に注目する．$T_eG(k)=V(k)$，$T_e(H(k))=W(k)$，$V(k)=W(k)^{\perp}\oplus W(k)$ とし，第1章，補題 5.12 の証明における局所同相 $(\boldsymbol{w}',\boldsymbol{w})\to\exp\boldsymbol{w}'\cdot\exp\boldsymbol{w}$ を考えると，補題の証明は $G(k)$, $H(k)$ が $\boldsymbol{R}$ 上のベクトル空間 $V(k)$, $W(k)$ の場合に示せば十分であることがわかる．$V(\infty)=\bigcup_k V(k)$ における $\mathbf{0}$ の基本近傍として $\{\bigcup_k \prod_{i=1}^{k}[-\varepsilon_i, \varepsilon_i]\ ;\ \varepsilon_i>0\}$ をとることができる．(弱位相であるから ε_i に関する条件はない)．このとき，同相

$$V(\infty)\cong(V(\infty)/W(\infty))\times W(\infty),\quad V(\infty)/W(\infty)=\bigcup_k V(k)/W(k)\ (\text{弱位相})$$

は容易にわかる．従って，補題はこの場合に成り立つ． （終）

系 6.15 補題 6.14 において，さらに $K(n)=H(n)\cap K(n+1)$ をみたす閉部分群列 $\{K(n)\}$ があるとき，

$$(G(\infty)/K(\infty),\ p,\ G(\infty)/H(\infty),\ H(\infty)/K(\infty),\ H(\infty))$$

はファイバーバンドルである．

［証明］ 定理 2.11 に補題 6.14 を適用すればよい． （終）

定理 6.16 G が線型 Lie 群であれば，普遍 G-バンドルが存在する．G がある $U(n, \boldsymbol{F})$ の閉部分群であれば，普遍 G-バンドル (EG, p, BG, G) で BG が CW-複体であるようなものがとれる．

［証明］ $G\subset U(n, \boldsymbol{F})$ の場合：

$$G(k)=U(n+k, \boldsymbol{F}),\quad H(k)=G\times U(k, \boldsymbol{F}),\quad K(k)=1\times U(k, \boldsymbol{F})$$

とおくと，これらの各対に対して(6.12)がみたされ，系 6.15 のファイバーバンドルがえられる．ここで，

$$H(\infty)/K(\infty)=\bigcup_k H(k)/K(k)\cong G,\quad H(\infty)\cong G\times K(\infty)$$

であり，$H(\infty)$ の $H(\infty)/K(\infty)$ への作用において $K(\infty)$ は自明に作用するから $H(\infty)$ を G に縮小できる．即ち，G-バンドル

$$(G(\infty)/K(\infty),\ p,\ G(\infty)/H(\infty),\ G)$$

がえられた．$G(k)/H(k)$ はコンパクト微分多様体であるから，補題 6.4 によって $G(\infty)/H(\infty)=\bigcup_k G(k)/H(k)$ は CW-複体である．

$G(\infty)/K(\infty)$ が ∞-連結であることをいえば，上の G-バンドルが普遍 G-バンドルであることがわかる．任意の整数 $i \geq 0$ と写像 $f: S^i \to G(\infty)/K(\infty)$ についても f の像はコンパクトであるから，ある $G(k)/K(k)$ に含まれる．k を十分大にとれば，定理 3.15 によって $f \simeq 0$．従って，∞-連続性が示された．

G が線型 Lie 群のときは，$G \subset GL(n, \boldsymbol{F})$ と考えてよい．CW-複体の部分を除いて証明は同様である．　(終)

注意 6.17　(1)　第5章，§2において，コンパクト Lie 群は十分大きい次元の直交群の部分群に同型であることが示される．従って，コンパクト Lie 群は CW-複体である分類空間をもつ．

(2)　コンパクト古典群はある $U(n, \boldsymbol{F})$ の閉部分群であるから，(1)の注意は必要ない．第4章までに使われる Lie 群のうち，$U(n, \boldsymbol{F})$ の閉部分群であることが自明でないのは，$\mathrm{Spin}(n)$ のみである．この場合は，(1)の注意によるかまたは Clifford 代数を用いた Spin 表現を使って直交群の閉部分群とみることができる．

(3)　一般に，位相群 G に対して，その $k+1$ 個の join $G^{(k+1)} = G * \cdots * G$ に適当な位相を入れ，G を自然に作用させることによって，k-普遍 G-バンドル $(G^{(k+1)}, p, G^{(k+1)}/G, G)$ が，また，その極限として G の分類空間 $\lim_{k} G^{(k+1)}/G$ がえられる(Milnor)．

G を Lie 群，H をその閉部分群とするとき，系列

$$H \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\pi} G/H \xrightarrow{j} BH \xrightarrow{\rho} BG$$

があって，続いた3つの空間の系はそれぞれファイバー空間(と同値)になっていることがわかる．

まず，最初のものについては，H-バンドル $(G, \pi, G/H, H)$ より明らか．

最後のものについては，普遍 G-バンドル (EG, p, BG, G) において，H は EG に作用していることから，$(EG, p', EG/H, H)$ は普遍 H-バンドルである．即ち，$EG/H = BH$ としてよい．このとき，射影 $BH = EG/H \to BG = EG/G$ を ρ とする($\rho = \rho(H, G)$ と表わすこともある)とき，

(6.18)　$(BH, \rho, BG, G/H, G)$ はファイバーバンドル．

次に，$EG \times (G/H)$ に G を

$$(x,\ g'H)g=(xg,\ g^{-1}g'H),\quad g,\ g'\in G$$

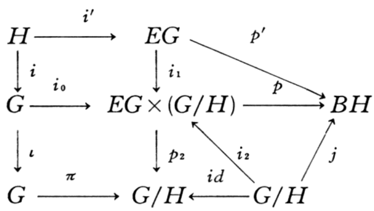
によって作用させることによって，G-バンドルがえられる．その底空間 $(EG\times(G/H))/G$ は EG において関係

$$x\sim x' \Longleftrightarrow (\exists g\in G)\ (x,\ H)g=(x',\ H) \Longleftrightarrow (\exists h\in H)\ xh=x'$$

を与えてえられるから，$BH=EG/H$ と一致する．

射影 $p_2: EG\times(G/H)\to G/H$ は明らかに弱ホモトピー同値，特に，EG が CW-複体であればホモトピー同値である．これらをまとめて，

(6.19)　G-バンドル $(EG\times(G/H),\ p,\ BH,\ G)$ があって，次の図式は可換である：



$i_0(g)=(x_0g,\ g^{-1}H)$, $\iota(g)=g^{-1}$
$i_1(x)=(x,H)$, $i_2(gH)=(x_0,gH)$,
$p_2(x,gH)=gH$, $j(gH)=x_0H$,

i_2 および p_2 は弱ホモトピー同値である．

普遍 G-バンドル $(EG,\ p,\ BG,\ G)$ と普遍 G'-バンドル $(EG',\ p',\ BG',\ G')$ の積 $(EG\times EG',\ p\times p',\ BG\times BG',\ G\times G')$ は普遍 $G\times G'$-バントルである．よって(記号的に表示して)，

(6.20)　$BG\times BG'=B(G\times G')$

第3章　古典群とその等質空間のコホモロジー

この章では，Serreのスペクトル系列を利用することにより古典群とその等質空間のコホモロジーを決定する．Serreスペクトル系列を構成する便宜上§1では立方体的チェイン複体の定義から始め，局所係数のホモロジー，コホモロジーを導入，コホモロジー作用素も紹介する．§2において，ファイバー空間に関するSerreスペクトル系列を構成するが，構成の詳細はSerreの原論文[17]を参照して貰うことにして，ここではその大略の記述にとどめる．Serreスペクトル系列の特別の場合としてGysin系列を§3において考え，応用として，古典群，Stiefel多様体，分類空間のコホモロジー環を決定する．§4では，このSerreスペクトル系列が自明となる条件を種々考察し，さらに，極大トーラスのコホモロジーへのWeyl群の作用を決定する．Chern類，Stiefel-Whitney類，Pontrjagin類等の特性類は§5で定義される．対称空間のうち，古典群の等質空間としてえられる古典型対称空間のコホモロジー環は§6で大略決定される．

§1　位相空間のコホモロジー環

立方体的チェイン複体

復習　$I^n=\{(t_1,\ \cdots,\ t_n)\in \boldsymbol{R}^n \mid 0\leq t_i\leq 1\}$：**単位 n-立方体**

記号　$[n]=\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$

単調増加関数 $\alpha:[m]\to[n]$ $(1\leq\alpha(1)<\alpha(2)<\cdots<\alpha(m)\leq n)$ について

$$\partial_\alpha{}^\varepsilon : I^m \longrightarrow I^n \quad (\varepsilon=0,\ 1) \Longleftrightarrow \partial_\alpha{}^\varepsilon(s_1,\ \cdots,\ s_m)=(t_1,\ \cdots,\ t_n),$$

$$t_i=\begin{cases} s_j & (i=\alpha(j)) \\ \varepsilon & (i\notin \mathrm{Im}\alpha) \end{cases}$$

特に，

$$\partial_k^\varepsilon : I^{n-1} \longrightarrow I^n \ (1 \leq k \leq n) \Longleftrightarrow \partial_k^\varepsilon = \partial_\alpha^\varepsilon,\ \alpha(j) = \begin{cases} j & (j<k) \\ j+1 & (j \geq k) \end{cases}$$

$$\pi_k : I^n \longrightarrow I^{n-1} \ (1 \leq k \leq n) \Longleftrightarrow \pi_k(t_1, \cdots, t_n) = (t_1, \cdots, t_{k-1}, t_{k+1}, \cdots, t_n)$$

定義　位相空間 X における**特異 n-立方体** $u \Longleftrightarrow u : I^n \to X$（連続写像）

特異 n-立方体 u の $(\boldsymbol{k}, \varepsilon)$-**面** $\partial_k^\varepsilon u \Longleftrightarrow \partial_k^\varepsilon u = u \circ \partial_k^\varepsilon : I^{n-1} \to I^n \to X$

特異 n-立方体 u が**退化**している $(n>0) \Longleftrightarrow u = v \circ \pi_k : I^n \to I^{n-1} \to X$ となる v と k がある $\Longleftrightarrow u$ が t_k に無関係となる k がある．

記号　$Q_n(X) = (X$ の特異 n-立方体で生成される自由可換群$)$

$D_n(X) = ($退化している特異 n-立方体で生成される $Q_n(X)$ の部分群$)$

$C_n(X) = Q_n(X)/D_n(X)$

定義　$d : C_n(X) \to C_{n-1}(X)$（準同型）$\Longleftrightarrow du = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k (\partial_k^0 u - \partial_k^1 u)$

ここで，$d(D_n(X)) \subset D_{n-1}(X)$ を使っている．さらに

$$d \circ d = 0$$

がみたされ，$\{C_n(X), d\}$ はチェイン複体である．これを**立方体的チェイン複体**という：$C_*(X) = \sum_n C_n(X)$，$(C_n(X)=0,\ n<0)$．

位相空間のコホモロジー環は通常特異 n-単体 $\Delta^n \to X$ から生成されるチェイン複体を基礎にして構成されるが，Eilenberg-Zilber の非輪状モデルの原理によって，上の立方体的チェイン複体を用いても同値なコホモロジー環が与えられることがわかる．ファイバー空間のコホモロジー，特にスペクトル系列の説明には後者の方が便利であるので，以下ではコホモロジー環等を立方体的チェイン複体から構成する．

（連続）写像 $f : X \longrightarrow Y$ に対して，

$$f_\# : C_n(X) \longrightarrow C_n(Y) \Longleftrightarrow f_\#(u) = f \circ u : I^n \longrightarrow X \longrightarrow Y$$

は $f_\# \circ d = d \circ f_\#$ をみたし，$f_\# : C_\#(X) \to C_\#(Y)$ はチェイン写像である．これによって，位相空間の圏からチェイン複体の圏への関手がえられる．

$f, g : X \to Y$ がホモトープ $f \simeq g$，即ち，写像

$$H : X \times I \longrightarrow Y,\ \ H(x,0) = f(x),\ \ H(x,1) = g(x)\ \ (I = I^1 = [0, 1])$$

があるとし，$u : I^n \to X$ に対して $Du : I^{n+1} \to Y$ を $Du(t_1, t_2, \cdots, t_{n+1}) = H(u(t_2, \cdots, t_{n+1}), t_1)$ で与えるとき，$dD + Dd = g_\# - f_\#$，即ち，$f_\#$ と $g_\#$ はチェインホ

モトープ(記号$f_\# \simeq g_\#$)となる：

$$f\simeq g : X\longrightarrow Y \Longrightarrow f_\# \simeq g_\# : C_\#(X)\longrightarrow C_\#(Y)$$

特に，I^pは可縮であることから，$C_*(I^p)\to C_*$(1点) はチェイン同値であることがわかる．C_n(1点)$=0$ $(n\neq 0)$，C_0(1点)$\cong \boldsymbol{Z}$ であることから，

$$\cdots\cdots\longrightarrow C_n(I^p)\xrightarrow{d} C_{n-1}(I^p)\longrightarrow\cdots\cdots\longrightarrow C_0(I^p)\longrightarrow \boldsymbol{Z}\longrightarrow 0$$

は完全，即ち，$C_*(I^p)$は非輪状である．

2つの位相空間における特異n-立方体$u : I^p\to X$，$v : I^q\to Y$の**クロス積**は，

$$u\times v : I^{p+q}\to X\times Y \Longleftrightarrow (u\times v)(t_1, \cdots, t_{p+q})=(u(t_1, \cdots, t_p), \ v(t_{p+1}, \cdots, t_{p+q}))$$

で定義される．u, vのうち，1方が退化しておれば$u\times v$も退化し，境界公式

$$d(u\times v)=du\times v+(-1)^p u\times dv$$

が成り立つ．従って，チェイン複体の**クロス積**

$$\times : C_p(X)\otimes C_q(Y)\longrightarrow C_{p+q}(X\times Y)$$

がえられる．非輪状モデルの原理によって

$$\times : C_*(X)\otimes C_*(Y)\simeq C_*(X\times Y) \quad (\text{チェイン同値})$$

逆方向のチェイン同値

$$\square : C_n(X\times Y)\longrightarrow \sum_{p+q=n} C_p(X)\otimes C_q(Y)$$

は

$$\square(u)=\sum \varepsilon(\alpha)\partial_\alpha{}^0 u_X\otimes\partial_\beta{}^1 u_Y, \quad u(\boldsymbol{t})=(u_X(\boldsymbol{t}), \ u_Y(\boldsymbol{t}))$$

で与えられる．ここで，$\alpha : [p]\to[n]$，$\beta : [q]\to[n]$，$[n]=\alpha[p]\cup\beta[q]$，$\varepsilon(\alpha)=(-1)^{\nu(\alpha)}$，$\nu(\alpha)=\sum_{i=1}^{p}(\alpha(i)-i)$．

クロス積は自然性および結合性

$$(f\times g)_\#(u\times v)=f_\# u\times g_\# v, \qquad u\times(v\times w)=(u\times v)\times w$$

をもつ．さらに，交換写像 $T : X\times Y\to Y\times X \Longleftrightarrow T(x, y)=(y, x)$，$\tau : C_p(X)\otimes C_q(Y)\to C_q(Y)\otimes C_p(X) \Longleftrightarrow \tau(\alpha\otimes\beta)=(-1)^{pq}(\beta\otimes\alpha)$ について

$$T_\#\circ\times\simeq\times\circ\tau \quad (\text{チェインホモトープ})$$

記号 $C_n(X, k)=$(次の条件をみたす$u : I^n\to X$で生成される$C_n(X)$の部分群)．Xの1点x_0が固定されていて，$n\leq k \Longrightarrow u(I^n)=x_0$；$n>k$ときは，帰納的に$u\in C_n(X, k) \Longleftrightarrow \partial_i{}^\varepsilon u\in C_{n-1}(X, k)$ $(1\leq i\leq n$；$\varepsilon=0, 1)$ で定義する．

k-連結の定義(第2章，§3)を用い，任意の$u : I^n\to X$をこのようなuに変形するホモトピーを構成することによって次のことがいえる．

(1.1)　X：k-連結$\Longrightarrow$射入 $i: C_n(X, k)\to C_n(X)$ はチェイン同値，即ち，チェイン写像 $\eta: C_n(X)\to C_n(X, k)$ があって，$\eta\circ i=1$，$i\circ\eta\simeq 1$.

ホモロジー群

(X, A) を位相空間の対$(A\subset X)$，Gをアーベル群(係数群という)とする.

記号　$C_n(X, A;\ G)=C_n(X)/C_n(A)\otimes G$ (チェイン群)

$\partial=d\otimes 1: C_n(X, A;\ G)\to C_{n-1}(X, A;\ G)$

$Z_n(X, A;G)=\mathrm{Ker}(\partial: C_n(X, A;G)\to C_{n-1}(X, A;G))$ (サイクルの群)

$B_n(X, A;G)=\mathrm{Im}(\partial: C_{n+1}(X, A;G)\to C_n(X, A;G))$(バウンダリーの群)

$f_\#=f_\#\otimes 1: C_n(X, A;\ G)\to C_n(Y, B;\ G)$　$(f:(X, A)\to(Y, B))$

$d\circ d=0\Longrightarrow\partial\circ\partial=0\Longrightarrow B_n(X, A;G)\subset Z_n(X, A;G)$. $f_\#$ はチェイン写像 $(f_\#\circ\partial=\partial\circ f_\#)\Longrightarrow f_\#(B_n(X, A;\ G))\subset B_n(Y, B;\ G)$，$f_\#(Z_n(X, A;\ G))\subset Z_n(Y, B;\ G)$. これらより，次の定義ができる.

定義　$H_n(X, A;\ G)=Z_n(X, A;\ G)/B_n(X, A;\ G)$：**$G$ を係数とする対 (X, A) の n 次(元)ホモロジー群.** $H_n(X;\ G)=H_n(X, \phi;\ G)$：**$X$のホモロジー群.**

$H_*(X, A;\ G)=\sum_n H_n(X, A;\ G)$，$H_*(X;\ G)=\sum_n H_n(X;\ G)$

$f_*=(f_\#)_*: H_n(X, A;\ G)\to H_n(Y, B;\ G)$：**$f$で誘導された準同型.**

これに関して,次の **Eilenberg-Steenrod** の 7 公理(A1)〜(A7)がみたされる：

(A1)　$1_*=1: H_n(X, A;\ G)\to H_n(X, A;\ G)$

(A2)　$(g\circ f)_*=g_*\circ f_*$，$(f:(X, A)\to(Y, B)$，$g:(Y, B)\to(Z, C))$

三対 (X, A, B)，$B\subset A\subset X$，について

$$0\longrightarrow C_n(A, B;\ G)\xrightarrow{i_\#}C_n(X, B;\ G)\xrightarrow{j_\#}C_n(X, A;\ G)\longrightarrow 0$$

はチェイン複体の完全系列であり，境界準同型

$$\partial_*: H_n(X, A;\ G)\longrightarrow H_{n-1}(A, B;\ G)$$

が，$\partial_*\{z\}=\{i_\#^{-1}\partial j_\#^{-1}(z)\}$，$z\in Z_n(X, A;\ G)$，によって定義される. ホモロジー代数の初歩的考察により次の 2 公理が示される.

(A3)　$\partial_*\circ f_*=(f|A)_*\circ\partial$

(A4) **(完全性公理)**　$\cdots\xrightarrow{\partial_*}H_n(A, B;\ G)\xrightarrow{i_*}H_n(X, B;\ G)\xrightarrow{j_*}H_n(X, A;\ G)\xrightarrow{\partial_*}H_{n-1}(A, B;\ G)\xrightarrow{i_*}\cdots$　は完全.

(A5) **(ホモトピー公理)**　$f\simeq g:(X, A)\longrightarrow(Y, B)\Longrightarrow f_*=g_*: H_n(X, A;G)$

$\longrightarrow H_n(Y, B; G)$

これは，$f\simeq g \Longrightarrow f_\# \simeq g_\#$ (チェインホモトープ)より直ちにえられる．

($A6$) (**切除公理**)　$\overline{U}\subset \mathrm{Int}\, A \Longrightarrow i_* : H_n(X-U, A-U; G)\cong H_n(X, A; G)$

これは，I^n を十分細かく細分して証明される．

($A7$) (**次元公理**)　$n\neq 0 \Longrightarrow H_n(1\text{点}; G)=0$

$H_0(1\text{点}; G)$ は係数群 G に同型である．さらに次の公理も成り立つ．

($A8$) (**加法性公理**)　$H_n(\coprod_\alpha X_\alpha ; G)\cong \sum H_n(X_\alpha ; G)$

定理 1.2　(**Eilenberg-Steenrod**)　これらの公理は CW-複体(($A8$)のないときは有限 CW-複体)の G を係数とするホモロジー群を特徴づける．

実際，CW-複体 K の各 n-胞体 e_α の特性写像を $u_\alpha : (I^n, \partial I^n)\cong(D^n, S^{n-1})\to(\bar{e}_\alpha, \partial e_\alpha)\subset(K^n, K^{n-1})$ とすれば，$C_n(K)=H_n(K^n, K^{n-1})$ は u_α の類を基底とする自由加群で，$C_*(K)=\sum_n C_n(K)$ は $\partial_* : H_n(K^n, K^{n-1})\to H_{n-1}(K^{n-1}, K^{n-2})$ によって，チェイン複体となり，次の自然な同型

(1.2)′　$$H_n(C_*(K)\otimes G)\cong H_n(K ; G)$$

がえられ，簡単な空間のホモロジー群が容易に求められる．例えば，

(1.3)　$H_i(S^n)=0\ (i\neq 0, n)$，$H_n(S^n)\cong H_{n+1}(D^{n+1}, S^n)\cong \boldsymbol{Z}\ (n\geq 1)$

また，(1.1)より

(1.4)　$X : k$-連結 $\Longrightarrow H_i(X ; G)=0\ (0<i\leq k)$，$H_0(X ; G)\cong G$

R は1をもつ可換環とし，係数群 G は R-加群であるとすれば，$H_n(X; G)$ も R-加群である．特に，R が主環(主イデアル整域)であれば次の**普遍係数定理**が成り立つ：

(1.5)　$H_n(X, A; G)\cong H_n(X, A; R)\otimes_R G\oplus \mathrm{Tor}^R(H_{n-1}(X, A; G), G)$ (直和)

また，クロス積 $\times : C_*(X)\otimes C_*(Y)\to C_*(X\times Y)$ がチェイン同値なことから，代数的に次の **Künneth の公式**がえられる：

(1.6)　$H_n(X\times Y, A\times Y; R)\cong \sum_{p+q=n}[H_p(X, A; R)\otimes_R H_q(Y; R)\oplus \mathrm{Tor}^R(H_{p-1}(X, A; R), H_q(Y ; R))]$　(R : 主環)

ここで第1項は，$\times : C_p(X)\otimes C_q(Y)\to C_{p+q}(X\times Y)$ から誘導されるホモロジー群のクロス積

$$\times : H_p(X; R)\otimes H_q(Y; R)\longrightarrow H_{p+q}(X\times Y; R)\quad (\text{準同型})$$

で対応している．クロス積は，自然性，結合性，可換性をもつ．

X が H-空間(特に X が位相群)のときには，積 $\mu : X\times X\to X$ で誘導される準同型 μ_* とクロス積について，$\alpha\otimes\beta\to\mu_*(\alpha\times\beta)$ によって積

$$H_p(X;\ R)\otimes H_q(X;\ R)\to H_{p+q}(X;\ R)$$

がえられ，$H_*(X;\ R)=\sum H_n(X;R)$ は1をもつ環になる．これを X の **Pontrjagin 環**または**ホモロジー環**という．

コホモロジー環

記号　$C^n(X, A;\ G)=\mathrm{Hom}(C_n(X)/C_n(A),\ G)$　(コチェイン群)

$\delta=d^* : C^{n-1}(X,\ A;\ G)\to C^n(X,\ A;\ G)$　$((\delta h)(u)=h(du))$

$Z^n(X,\ A;\ G)=\mathrm{Ker}(\delta : C^n(X,\ A;\ G)\to C^{n+1}(X,\ A;\ G))$ (コサイクルの群)

$B^n(X,\ A;\ G)=\mathrm{Im}(\delta : C^{n-1}(X,\ A;\ G)\to C^n(X,\ A;\ G))$　(コバウンダリーの群)

$f^\#=(f_\#)^* : C^n(Y,\ B;\ G)\to C^n(X,\ A;\ G)$　$(f : (X,\ A)\to(Y,\ B),$ $(f^\# h)u=h(f_\# u))$

定義　$H^n(X,\ A;G)=Z^n(X,\ A;G)/B^n(X,A;G)$　(***n* 次コホモロジー群**)

$f^*=(f^\#)^* : H^n(Y,\ B;G)\to H^n(X,\ A;G)$　(f で誘導された準同型)

境界準同型

$$\delta^* : H^n(A,\ B;\ G)\longrightarrow H^{n-1}(X,\ A;\ G)$$

もホモロジー群と同様に定義され，(A 1)～(A 8) は f_*, ∂_* 等を f^*, δ^* にかえ，矢印の方向を逆向きにすることによって，そのまま成立する．普遍係数定理は次の形になる：

(1.7)　$H^n(X,\ A;\ G)\cong\mathrm{Hom}_R(H_n(X,\ A;\ R),\ G)\oplus\mathrm{Ext}_R(H_{n-1}(X,\ A;\ R),\ G)$ (直和)

$H_{n-1}(X,\ A;\ R)$ が R-自由(たとえば R が体)のときは

$$H^n(X,\ A;\ R)\cong\mathrm{Hom}_R(H_n(X,\ A;\ R),\ R)=(H_n(X,\ A;\ R)\text{ の双対})$$

さらに，$H_n(X,\ A;\ R)$ が有限生成 R-自由加群のときは同型

(1.8)　$$H^n(X,\ A;\ R)\cong H_n(X,\ A;\ R)$$

がある．

$c\in C_n(X,\ A;\ R)$, $f\in C^n(X,\ A;\ G)=\mathrm{Hom}_R(C_n(X,\ A;\ R),\ G)$ について

$$\langle f,\ c\rangle=f(c)\in G$$

を **Kronecker 積**という．Kronecker 積は

$$\langle\delta f,\ c\rangle=\langle f,\ \partial c\rangle$$

をみたし，コホモロジー類とホモロジー類の間の **Kronecker 積**

$$\langle\ ,\ \rangle : H^n(X,\ A;\ G)\otimes_R H_n(X,\ A;\ R)\longrightarrow G$$

を定義する．(1.8)は次の直交条件と同値である：

(1.8)′　$\alpha=0\Longleftrightarrow\langle\alpha,\ x\rangle=0\ (\forall x)\quad (G=R)$

(1.8)″　$x=0\Longleftrightarrow\langle\alpha,\ x\rangle=0\ (\forall\alpha)\quad (G=R)$

$f\in C^p(X;\ R)$ と $g\in C^q(X;\ R)$ の(**カップ**)**積**を

$$(f\cdot g)(u)=\sum\varepsilon(\alpha)f(\partial_\alpha{}^0u)g(\partial_\beta{}^1u)\in R\quad (u : I^{p+q}\rightarrow X)$$

で定義する(記号は□の項参照)．この積は自然性および

$$(f\cdot g)\cdot h=f\cdot(g\cdot h),\qquad \delta(f\cdot g)=\delta f\cdot g+(-1)^p f\cdot\delta g$$

をみたし，コホモロジー類の間の(**カップ**)**積**

$$\cdot : H^p(X;\ R)\otimes H^q(X;\ R)\longrightarrow H^{p+q}(X;\ R)$$

を誘導する．$H^*(X;\ R)=\sum H^n(X;R)$ はこの積に関して R-代数となり，その単位元 $1\in H^0(X;\ R)$ は $1(u)=1\in R$ で与えられる $1\in C^0(X;\ R)$ のコホモロジー類である．またクロス積のホモトピー可換性より，

(1.9)　$\alpha\beta=(-1)^{pq}\beta\alpha,\ \ \alpha\in H^p(X;\ R),\ \ \beta\in H^q(X;\ R)$

$C^p(X,\ A;\ R)$ の元は $f\in C^p(X;\ R)$ で $f(u)=0,\ \ u(I^p)\subset A,$ をみたすものと考えられる．このことから積

$$\cdot : H^p(X,\ A;\ R)\otimes H^q(X;\ R)\longrightarrow H^{p+q}(X,\ A;\ R)$$

$$\cdot : H^p(X;\ R)\otimes H^q(X,\ A;\ R)\longrightarrow H^{p+q}(X,\ A;\ R)$$

$$\cdot : H^p(X,\ A;\ R)\otimes H^q(X,\ A;\ R)\rightarrow H^{p+q}(X,\ A;\ R)$$

が定義され，上の性質をみたす．これらは準同型 $j^* : H^*(X,\ A;\ R)\rightarrow H^*(X;\ R)$ を通じて相互に関係している．また $\delta^* : H^*(A;R)\rightarrow H^{*+1}(X,\ A;\ R)$ との関係は，$i^* : H^*(X;\ R)\rightarrow H^*(A;R),\ \alpha\in H^p(A;\ R), \beta\in H^q(X;\ R)$ について，

$$\delta^*(\alpha\cdot i^*\beta)=\delta^*\alpha\cdot\beta$$

$p_X : X\times Y\rightarrow X,\ p_Y : X\times Y\rightarrow Y$ を射影とするとき，**クロス積**

$$\times : H^p(X,\ A;\ R)\otimes H^q(Y;\ R)\longrightarrow H^{p+q}(X\times Y,\ A\times Y;\ R)$$

が $\alpha\times\beta=p_X{}^*\alpha\cdot p_Y{}^*\beta$ で定義される．チェイン同値□を用いて，クロス積を直接定義することもできる．逆にクロス積が与えられているとき，対角写像 $d : X\rightarrow X\times X$ を用いて，(カップ)積は $\alpha\cdot\beta=d^*(\alpha\times\beta)$ で与えることができる．

Künneth の公式(1.6)と双対同型を用いると，$H^p(X, A; R)$ が各 p について(または $H^q(Y; R)$ が各 q について)有限生成 R-自由加群ならば，クロス積は次の同型(**Künneth の公式**)を与える：

(1.10) $$\sum_{p+q=n} H^p(X, A; R)\otimes_R H^q(Y; R)\cong H^n(X\times Y, A\times Y; R)$$

Bockstein 準同型

アーベル群の完全系列

$$0\longrightarrow H\xrightarrow{f}G\xrightarrow{g}K\longrightarrow 0$$

について，次はチェイン複体の完全系列である：

$$0\longrightarrow C_n(X; H)\xrightarrow{1\otimes f}C_n(X; G)\xrightarrow{1\otimes g}C_n(X; K)\longrightarrow 0$$

これから，次の **Bockstein 完全系列**がえられる.

(1.11) $$\cdots\longrightarrow H_n(X; H)\xrightarrow{f_*}H_n(X; G)\xrightarrow{g_*}H_n(X; K)\xrightarrow{\beta}H_{n-1}(X; H)\xrightarrow{f_*}\cdots$$

f^*, g_* を準同型 f, g で**誘導された対応**，β を **Bockstein 準同型**という． X を対 (X, A) でおきかえても同様である．コホモロジーの場合は次の形になる：

(1.11)′ $$\cdots\longrightarrow H^n(X; H)\xrightarrow{f_*}H^n(X; G)\xrightarrow{g_*}H^n(X; K)\xrightarrow{\beta}H^{n+1}(X; H)\xrightarrow{f_*}\cdots$$

これらの準同型は自然，即ち，写像で誘導された準同型と可換である．また境界準同型 ∂_*, δ^* との関係は

(1.12) $$\partial_*\beta=-\beta\partial_*,\qquad \delta^*\beta=-\beta\delta^*$$

クロス積との関係は，ホモロジー，コホモロジーの場合とも

(1.13) $\beta(x\times y)=\beta x\times y+(-1)^n x\times\beta y\quad (n=\deg x\Longleftrightarrow x\in H^n)$

Pontrjagin 積，(カップ)積との関係は

(1.13) $\beta(x\cdot y)=\beta x\cdot y+(-1)^n x\cdot\beta y\quad (n=\deg x)$

$H=G=\boldsymbol{Z}$，$K=\boldsymbol{Z}_p=\boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z}$ のときは，

$\rho=g_*: H^n(X; \boldsymbol{Z})\to H^n(X; \boldsymbol{Z}_p)$ を **mod p** の **reduction**， $\beta: H^n(X; \boldsymbol{Z}_p)\longrightarrow H^{n+1}(X; \boldsymbol{Z})$， $\beta_p=\rho\circ\beta: H^n(X; \boldsymbol{Z}_p)\longrightarrow H^{n+1}(X; \boldsymbol{Z}_p)$ をともに **mod p の Bockstein 準同型**という． β_p は $\beta_p\circ\beta_p=0$ をみたすから β_p に関するコホモロジー群 $H_\beta{}^n(H^*(X; \boldsymbol{Z}_p))$ がえられる.

通常，係数環 $\boldsymbol{Z}$ は省略して，$H_n(X)=H_n(X; \boldsymbol{Z})$，$H^n(X)=H^n(X; \boldsymbol{Z})$ とかく.

定義　位相空間 X が**有限型**$\Longleftrightarrow H_n(X)$ が各 n について有限生成.

有限型位相空間 X の係数体 $\boldsymbol{k}$ 上の **Poincaré 級数**(または **Poincaré 多項式**)は次式で定義される：

$$P_k(X,\ t)=\sum_n \dim_k H_n(X;\ \boldsymbol{k})\cdot t^n=\sum_n \dim_k H^n(X;\ \boldsymbol{k})\cdot t^n$$

(1.14)　(1)　位相和 $\coprod$ について，$P_k(X\coprod Y,\ t)=P_k(X,\ t)+P_k(Y,\ t)$

(2)　直積×について，$P_k(X\times Y,\ t)=P_k(X,\ t)\cdot P_k(Y,\ t)$

補題 1.15　X を有限型位相空間，$P_{\boldsymbol{Q}}(X,\ t)=\sum b_n t^n$，$P_{\boldsymbol{Z}_p}(X,\ t)=\sum a_n t^n$ とする.

(1)　$a_0=b_0$，$a_n\geq b_n$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$

(2)　$H_n(X)$ の p-成分が c_n 個の巡回群(位数は p の巾)の直和であれば，

$$a_n=b_n+c_n+c_{n-1}$$

特に，

$a_n=b_n$ $(n=1,\ 2,\cdots)\Longleftrightarrow H_*(X)$: p-torsion なし$\Longleftrightarrow H^*(X)$: p-torsion なし.

(3)　(2)の巡回群のうち位数 $>p$ のものの個数を c_n' とするとき，

$$b_n+c'_{n-1}+c_n'=\dim_{\boldsymbol{Z}_p} H_{\beta}{}^n(H^*(X;\ \boldsymbol{Z}_p))$$

特に，$\dim_{\boldsymbol{Z}_p} H_{\beta}{}^n(H^*(X;\ \boldsymbol{Z}_p))=\dim_{\boldsymbol{Q}} H^n(X;\ \boldsymbol{Q})\Longrightarrow H_n(X)$ の p-成分は $\boldsymbol{Z}_p$ の直和.

［証明］　アーベル群の基本定理により，$H_n(X)$ の自由部分 F_n を b_n 個の $\boldsymbol{Z}$ の直和，p-成分を c_n 個の $\boldsymbol{Z}_{p^r}$ の直和に分解して普遍係数定理を使えば，$\dim H^n(X;\ \boldsymbol{Q})=b_n$，$\dim H^n(X;\ \boldsymbol{Z}_p)=b_n+c_n+c_{n-1}$．ただし，$H_0(X)=F_0$，$b_0=$($X$ の弧状成分の数)．これらより(1)，(2)をうる．(3)については，$H_{n-1}(X)$ の直和因子 $\boldsymbol{Z}_{p^r}$ に対応する $A=\mathrm{Hom}(\boldsymbol{Z}_{p^r},\ \boldsymbol{Z}_p)\subset H^{n-1}(X;\ \boldsymbol{Z}_p)$ と $B=\mathrm{Ext}(\boldsymbol{Z}_{p^r},\ \boldsymbol{Z}_p)\subset H^n(X;\ \boldsymbol{Z}_p)$を考えるとき，$\beta_p$ は $A\cong\boldsymbol{Z}_p$ を $B\cong\boldsymbol{Z}_p$ に対応させ，$\beta_p=p^{r-1}:\boldsymbol{Z}_p\to\boldsymbol{Z}_p$ の形である．$r=1$ ならば，β_p は同型で A と B は $H_\beta{}^n$ で消し合い，$r>1$ なら $\beta_p(A)=0$ で，A, B は $H_\beta{}^n$ で残る．このことから(3)がえられる．(終)

コホモロジー作用素

定義　自然性 $(f^*\Phi=\Phi f^*)$ をみたす対応

$$\Phi:\ H^n(X,\ A;\ G)\longrightarrow H^{n+q}(X,\ A;\ H)$$

の族を $(\boldsymbol{n},\ \boldsymbol{G},\ \boldsymbol{n}+\boldsymbol{q},\ \boldsymbol{H})$**-型コホモロジー作用素**，$q$ をその**次数**という．さらに

各 n について Φ が与えられていて，境界準同型 δ^* と可換 $(\delta^*\Phi=\Phi\delta^*)$ であるときには，**q 次の (G, H)-型安定コホモロジー作用素**という．

係数群の準同型 $\varphi: G\to H$ で誘導された φ_* は 0 次の安定コホモロジー作用素，Bockstein 準同型 β は 1 次のコホモロジー作用素であり $\{(-1)^n\beta\}$ は 1 次の安定コホモロジー作用素である．

コホモロジー環 $H^*(X, A; R)$ の積を用いて，$\Phi(x)=x^k$ とおけば

$$\Phi: H^n(X, A; R)\longrightarrow H^{kn}(X, A; R)$$

はコホモロジー作用素である．$k=p$(素数) かつ $R=\boldsymbol{Z}_p$ のとき，この Φ は安定コホモロジー作用素に拡張できて，**Steenrod の作用素**とよばれるものになる．

$p=2$ のときは，**(Steenrod の) 平方作用素**

$$Sq^r: H^n(X, A; \boldsymbol{Z}_2)\longrightarrow H^{n+r}(X, A; \boldsymbol{Z}_2)$$

が存在する．

(1.16)　(Sq の基本的性質)

(i)　Sq^r は $Sq^r(x)=x^2$ $(x\in H^r)$ をみたす安定コホモロジー作用素であり，この性質は Sq^r を特徴づける $(r>0)$．

(ii)　$Sq^0=\mathrm{id}$，$Sq^r=0$ $(r<0)$，$Sq^r(x)=0$ $(x\in H^n,\ n<r)$

(iii)　$Sq^1=\beta_2$

(iv)　**(Cartan 公式)**　$Sq^r(xy)=\sum_{s+t=r} Sq^s(x)Sq^t(y)$

(v)　**(Adem の関係式)**　$Sq^aSq^b=\sum_t \binom{b-t-1}{a-2t} Sq^{a+b-t}Sq^t$ $(a<2b)$

p が奇素数のときは **(Steenrod の) 素約巾作用素**

$$\mathcal{P}^r: H^n(X, A; \boldsymbol{Z}_p)\longrightarrow H^{n+2r(p-1)}(X, A; \boldsymbol{Z}_p)$$

が存在する．

(1.17)　($\mathcal{P}$ の基本的性質)

(i)　$\mathcal{P}^r$ は $\mathcal{P}^r(x)=x^p$ $(x\in H^{2r})$ をみたす安定コホモロジー作用素であり，この性質は $\mathcal{P}^r$ を特徴づける $(r>0)$．

(ii)　$\mathcal{P}^0=\mathrm{id}$，$\mathcal{P}^r=0$ $(r<0)$，$\mathcal{P}^r(x)=0$ $(x\in H^n,\ n<2r)$

(iii)　**(Cartan 公式)**　$\mathcal{P}^r(xy)=\sum_{s+t=r}\mathcal{P}^s(x)\mathcal{P}^t(y)$

(iv)　**(Adem の関係式)**　$\mathcal{P}^a\mathcal{P}^b=\sum_s(-1)^{a+s}\binom{(b-s)(p-1)-1}{a-sp}\mathcal{P}^{a+b-s}\mathcal{P}^s$ $(a<pb)$

$$\mathcal{P}^a\beta_p\mathcal{P}^b=\sum_s(-1)^{a+s}\binom{(b-s)(p-1)}{a-ps}\beta_p\mathcal{P}^{a+b-s}\mathcal{P}^s$$
$$+\sum_s(-1)^{s+a-1}\binom{(b-s)(p-1)-1}{a-sp-1}\mathcal{P}^{a+b-s}\beta_p\mathcal{P}^s \quad (a\leq pb)$$

局所係数(コ)ホモロジー

定義　$\underline{G}=\{G_x\}_{x\in X}$ が X 上の**局所係数群(環)**$\Longleftrightarrow G_x$ はアーベル群(環)で，X における道　$w: I\to X$　に対して群(環)の(準)同型 $w_*: G_{w(1)}\to G_{w(0)}$ が与えられ，次の条件をみたす：

(a)　定値道 0 に対して，$0_*=1$

(b)　道のホモトピー $w_0\simeq w_1 \Longrightarrow w_{0*}=w_{1*}$

(c)　道の積について，$(w*w')_*=w_*\circ w'_*$

w の逆の道 $\overline{w}$ について，$w*\overline{w}\simeq 0\Longrightarrow w_*\circ\overline{w}_*=1$. 同様に $\overline{w}_*\circ w_*=1$ であるから，w_* はつねに同型対応である.

定義　局所係数群(環)$\{G_x\}$が**自明**$\Longleftrightarrow$群(環) G と同型 $\lambda_x: G\to G_x$ があって，任意の道 w について，$w_*\lambda_{w(1)}=\lambda_{w(0)}$.

位相空間 X 上の局所係数群 $\underline{G}=\{G_x\}$ が与えられているとき，退化していない各特異立方体 $u: I^n\to X$ の係数 g_u は $G_{u(\mathbf{0})}$ $(\mathbf{0}=(0,\cdots,0)\in I^n)$ に値をとるものとし

$$C_n(X;\ \underline{G})=\{\sum_u g_u\cdot u\,(\text{有限和}),\ g_u\in G_{u(\mathbf{0})}\}$$

に和 $\sum g_u\cdot u+\sum g'_u\cdot u=\sum(g_u+g'_u)\cdot u$ と境界作用素

$$\partial(\sum g_u\cdot u)=\sum_{k=1}^n(-1)^k(w_{k*}g_u\cdot\partial_k{}^1u-g_u\cdot\partial_k{}^0u),$$

$w_k(s)=u(0,\ \cdots,\ 0,\ \overset{(k)}{s},\ 0,\ \cdots,\ 0)$ を導入して，局所係数群 $\underline{G}$ をもつ X のチェイン複体$\{C_n(X;\ \underline{G}),\ \partial\}$が定義され，そのホモロジー群として，$X$ の**局所係数ホモロジー群**

$$H_n(X;\ \underline{G})=H_n(C_*(X;\ \underline{G}))$$

が定義される．局所係数群 $\underline{G}$ をもつ X のコチェイン複体は各 u に $G_{u(\mathbf{0})}$ の元 $f(u)$ を与える関数全体

$$C^n(X;\ \underline{G})=\{f\,|\,f(u)\in G_{u(\mathbf{0})}\}$$

に和 $(f+f')(u)=f(u)+f'(u)$ と境界作用素

$$(\delta f)(u)=\sum_{k=1}^n(-1)^k(w_{k*}f(\partial_k{}^1u)-f(\partial_k{}^0u))$$

を与えて定義され，そのコホモロジー群として，X の**局所係数コホモロジー群**

$$H^n(X;\ \underline{G})=H^n(C^*(X;\ \underline{G}))$$

が定義される．ここで，道 w_k は ∂, δ が well-defined になるように，$G_{u(0)}$ と $G_{\partial_k{}^1u(0)}$ の間の同型を与えるために導入され，$u(0)$ と $\partial_k{}^1u(0)$ を結ぶ道で，u による I^n の中の道の像である．I^n の任意の道は互いにホモトープであることから，w_k はこのような道であれば何でもよい．このことは $\partial\partial=0$ の証明にも使われる．また次の(カップ)積の定義における道 w_β はその意味において特に指定する必要はない．$\underline{R}=\{R_x\}$ が X 上の局所係数環のとき，$f\in C^p(X;\ \underline{R})$ と $g\in C^q(X;\ \underline{R})$ の(カップ)積を通常の積と同様に

$$(f\cdot g)(u)=\sum_\alpha \varepsilon(\alpha)f(\partial_\alpha{}^0u)w_{\beta*}g(\partial_\beta{}^1u)$$

で定義する．このとき $(f\cdot g)\cdot h=f\cdot(g\cdot h)$, $\delta(f\cdot g)=(\delta f)\cdot g+(-1)^pf\cdot(\delta g)$ が成り立ち，(カップ)積

$$H^p(X;\ \underline{R})\otimes H^q(X;\ \underline{R})\longrightarrow H^{p+q}(X;\ \underline{R})$$

が定義され，$H^*(X;\ \underline{R})=\sum H^n(X;\ \underline{R})$ は環になる．その他，通常の(コ)ホモロジーと類似の性質があるが省略する．

補題 1.18　(1)　X：1-連結 $\Longrightarrow X$ 上の任意の局所係数群は自明．

(2)　X 上の局所係数群が自明ならばその局所係数ホモロジー群，局所係数コホモロジー群(環)は通常の係数のものと同一視できる．

(3)　X は 0-連結とする．X 上の局所係数群 $\underline{G}=\{G_x\}$ が自明 $\Longleftrightarrow X$ の各点 x について射入 $i_x:x\to X$ は同型 $i_x{}^*:H^0(X;\ \underline{G})\cong H^0(x;\ G_x)=G_x$ を誘導する $\Longleftrightarrow$ 同じことが X の 1 点についていえる．

[証明]　(1)　$G=G_{x_0}$，x と x_0 を結ぶ道 w について，$\lambda_x=w_*$ とおけば，X が 1-連結であるから，w は存在して互いにホモトープで $\lambda_x:G\cong G_x$ がきまる．

(2)　同型 λ_x を用いて，各 G_x を $G=G_{x_0}$ でおきかえるとき，∂ の定義における w_{k*} は恒等写像でおきかえられる．よって，$\sum g_u\cdot u$ を $\sum u\otimes g_u$ でおきかえて，$C_n(X;\ \underline{G})=C_n(X;\ G)$ とみなせる．コホモロジーの場合も同様．

(3)　$\underline{G}$ が自明ならば，(2)により，$H^0(X;\ \underline{G})=H^0(X;\ G)=G$ とみて $i_x{}^*$ は λ_x で与えられることがわかる．逆に，$H^0(X;\ \underline{G})=Z^0(X;\ \underline{G})\subset C^0(X;\ \underline{G})$ を考える．$f\in C^0(X;\ \underline{G})$ が $Z^0(X;\ \underline{G})$ に入るための条件 $\delta f(w)=0$, $w:I\to X$, は $f(\partial_1{}^0w)=w_*f(\partial_1{}^1w)$，即ち，$i_{w(0)}{}^*=w_*i_{w(1)}{}^*$．よって $\underline{G}$ は自明．自明

の条件　$w_*\lambda_{w(1)}=\lambda_{w(0)}$ が閉じた道についていえれば，一般の道についてもいえる．　(終)

§2　ファイバー空間のコホモロジー(Serre のスペクトル系列)

ファイバー空間，相対ファイバー空間

第2章，§3における(Serre の意味の)ファイバー空間の定義を思い起こそう：　(E, p, B) は**ファイバー空間**

$$\Longleftrightarrow p: E\to B \text{ は } I^n \text{ に関する被覆ホモトピー性質をもつ全射.}$$

第2章，定理3.6，定理3.9より

(2.1)　ファイバーバンドル (E, p, B, F, G)，被覆空間 $(E=\tilde{X}, p, B=X$ および道の空間の射影 $p=p_1: E=\Omega(X, A, B)\to B$, $p=p_0: E=\Omega(X, B, A)\to B$ において，(E, p, B) はファイバー空間である．

また，第2章，系3.11の完全系列

(2.1)′　$\cdots\longrightarrow\pi_n(F)\xrightarrow{i_*}\pi_n(E)\xrightarrow{p_*}\pi_n(B)\xrightarrow{\Delta}\pi_{n-1}(F)\longrightarrow\cdots$

を誘導するという意味において，ファイバー $F=p^{-1}(b)$ とその E への射入をつけ加えてえられる系列

$$F\xrightarrow{i}E\xrightarrow{p}B$$

をもってファイバー空間(またはファイバーリング)ということもある．

ファイバー空間を相対化するには2通りの方法がある．

底空間 B の部分空間 B_0 について，$E_0=p^{-1}(B_0)$ とおけば，$F\xrightarrow{i}E_0\longrightarrow B_0$ $(b\in B_0)$ もファイバー空間となる．この意味で，系列

$$F\xrightarrow{i}(E, E_0)\xrightarrow{p}(B, B_0)$$

を**相対ファイバー空間**という．第2章，定理3.10は容易に一般化されて

(2.2)　$p_*: \pi_n(E, E_0)\cong\pi_n(B, B_0)$　(全単射)

の形の定理となる．$B_0=1$ 点 の場合がもとの定理

(2.2)′　$p_*: \pi_n(E, F)\cong\pi_n(B)$　(全単射)

である．

全空間 E が ∞-連結であれば，対 (E, F) のホモトピー完全系列によって，

$\partial:\pi_{n+1}(E, F)\to\pi_n(F)$ は $n\geq 1$ のとき同型である．このとき，

$$S=p_*\circ\partial^{-1}:\pi_n(F)\longrightarrow\pi_{n+1}(B)\quad(\text{同型})$$

を**ホモトピー懸垂**という．実際に応用されるのは，次の2つの場合である：

(2.3)　(1)　位相群 G と分類空間 BG について，$S:\pi_n(G)\cong\pi_{n+1}(BG)$

(2)　位相空間 X と閉道空間 ΩX について，$S:\pi_n(\Omega X)\cong\pi_{n+1}(X)$

ここで，(1)の場合はファイバー空間(普遍 G-バンドル) (EG, p, BG) において EG は ∞-連結である．(2)の場合は，道のファイバー空間 $(\Omega(X, X, x_0), p_0, X)$ において，$\Omega(X, X, x_0)$ が可縮であることが次の補題よりえられる．

定義　A は X の**変位レトラクト**$\Longleftrightarrow A\subset X$ であり，ホモトピー $r_t:X\to X$ で，$r_0=1_X$，$r_1(X)\subset A$，$r_t|A=1_A$ をみたすものがある．

$f:X\to Y$ の**写像柱** $Z_f\Longleftrightarrow Z_f=(X\times I)\coprod Y/\sim$，$(x, 0)\sim f(x)$

容易にわかるように，Y は Z_f の変位レトラクトである．また，X の変位レトラクト A について，射入 $i:A\to X$ はホモトピー同値写像である．

補題 2.4　A は $\Omega(X, X, A)$ の変位レトラクトである．ただし，A の各点はその点の定値道と同一視する．

［証明］　$w\in\Omega(X, X, A)$ につき，$r_t(w)(s)=w(t+s-st)$ とおけばよい．(終)

ファイバー方向の相対化は次のように定義される．

定義　$(F, F_0)\xrightarrow{i}(E, E_0)\xrightarrow{p}B$ は**相対ファイバー空間**

$\Longleftrightarrow F\xrightarrow{i}E\xrightarrow{p}B$，$F_0\xrightarrow{i_0}E_0\xrightarrow{p_0}B$ はファイバー空間$(i_0=i|F_0, p_0=p|E_0)$．

$((E, E_0)), p, B, (F, F_0), G)$ は**相対ファイバーバンドル**

$\Longleftrightarrow(E, p, B, F, G)$，$(E_0, p_0, B, F_0, G)$ はファイバーバンドル$(p_0=p|E_0)$．

ただし，G の F_0 への作用は，F への作用の制限でえられるものとする．

相対ファイバーバンドルは，相対ファイバー空間とみなせる．

補題 2.5　ファイバーバンドル (E, p, B, F, G) において，$\hat{E}$ を $p:E\to B$ の写像錐，$\hat{p}:\hat{E}\to B$ は $\hat{p}(x, t)=p(x)$，$x\in E$, で定義される p の拡張，$\hat{F}$ は定値写像 $0:F\to 1$ 点　の写像錐とするとき，$((\hat{E}, E), \hat{p}, B, (\hat{F}, F), G)$ は相対ファイバーバンドルである．

［証明］　G の作用は　$g\cdot(f, t)=(g\cdot f, t)$　によって $\hat{F}$ に拡張され，座標関数 ϕ_α は $\hat{\phi}_\alpha(b, (f, t))=(\phi_\alpha(b, f), t)$ によって，$U_\alpha\times\hat{F}\cong\hat{p}^{-1}(U_\alpha)$ に拡張される．こ

のとき，$(\hat{E}, \hat{p}, B, \hat{F}, G)$ はファイバーバンドルである．　(終)

例えば，球バンドル (E, p, B, S^m, G) から，胞体バンドル $((\hat{E}, E), p, B, (D^{m+1}, S^m), G)$ がえられる．

また，ベクトルバンドル $\xi=(E, p, B, \boldsymbol{F}^n, G)$, $G\subset U(n, \boldsymbol{F})$, の同伴胞体バンドル $\xi(D^{dn})$ は同伴球バンドル $\xi(S^{dn-1})$ から，補題2.5のようにしてえられると考えてよい．それらの作る相対バンドルの全空間 $(E(D^{dn}), E(S^{dn-1}))$ は，$(E, E-s_0(B))$ とホモトピー同値である ($s_0 : B\to E$ は0-切断)．

ファイバー空間に附随した局所(コ)ホモロジー係数

ファイバー空間 (E, p, B) において，底空間 B の各点 b の上のファイバー F_b の(コ)ホモロジーが B の上の局所係数となることを示そう．

補題 2.6　(1)　B における道 $w : I\to B$ に対して，以下の条件をみたす $S=S_w : Q_n(F_{w(0)})\to Q_{n+1}(E)$ がある：$(u : I^n\to F_b \Longrightarrow Su : I^{n+1}\to E)$

(i)　$(p\circ Su)(t_1, t_2, \cdots, t_{n+1})=w(t_1)$

(ii)　$\partial_1{}^0(Su)=u$, $\partial_{i+1}{}^\varepsilon(Su)=S(\partial_i{}^\varepsilon u)$　$(1\leq i\leq n)$

(iii)　$S(u'\circ\pi_k)=Su'\circ\pi_{k+1}$　$(1\leq k\leq n,\ u' : I^{n-1}\to F_b)$

(2)　(1)の S_w について $w_\# u=\partial_1{}^1(S_w u)$ とおくとき，

$w\simeq w'$ (道のホモトピー) $\Longrightarrow w_\#\simeq w_\#' : C_n(F_{w(0)})\to C_n(F_{w(1)})$

［証明］　(1) n に関する帰納法による．$n=0$ のときは，$w_t=w(t) : I^0\to B$ をホモトピーと見て，$u : I^0\to F_{w(0)} \Longrightarrow p\circ u=w_0$ に対して I^0 に関する被覆ホモトピー性質から，$u_t : I^0\to E$ で，$u_0=u$, $p\circ u_t=w_t$ をみたすものがとれる．$Su(t)=u_t$ とおく．u が退化しているときは(iii)で Su が定まり(i),(ii)をみたす．u が退化していないときは，(ii)によって，$Su_0=Su|0\times I^n\cup I\times\partial I^{n-1}$ はすでに与えられており，$p\circ Su$ は(i)によって規定されている．次の補題2.7を用いると Su の存在がわかる．

(2)　$W : I^2\to B$ は $w\simeq w'$ を示すホモトピーとする：$W(0, t_2)=w(t_2)$, $W(1, t_2)=w'(t_2)$, $W(t_1, 0)=w(0)$, $W(t_1, 1)=w(1)$．$Du : I^{n+2}\to E$ を

(i)′　$(p\circ Du)(t_1, t_2, \cdots, t_{n+2})=W(t_1, t_2)$

(ii)′　$\partial_1{}^0(Du)=S_w u$, $\partial_1{}^1(Du)=S_{w'}u$, $\partial_2{}^0 Du=u\circ\pi_1$, $\partial_{i+2}{}^\varepsilon(Du)=D(\partial_i{}^\varepsilon u)$

(iii)′　$D(u'\circ\pi_k)=Du'\circ\pi_{k-2}$

となるように構成できれば，$D'u=\partial_2{}^1(Du)$ について，$dD'+D'd=\partial_1{}^1S_{w'}u-\partial_1{}^1S_wu \Longrightarrow w_\#\simeq w_\#'$ となる．Du の構成は Su の構成と同様で，Du を $\partial I\times I^{n+1}\cup I\times 0\times I^n\cup I^2\times\partial I^n$ から I^{n+2} に拡張するときに次の補題を用いる．　(終)

補題 2.7　L を I^n の面 $\partial_i{}^\varepsilon I^{n-1}$ のいくつかの空でない和集合で，可縮であるようなものとする．写像 $f: L\to E$, $h: I^n\to B$ が $p\circ f=h|L$ をみたせば，f の拡張 $\bar{f}: I^n\to E$, $\bar{f}|L=f$ で $p\circ\bar{f}=h$ をみたすものが存在する．

［証明］　同相 $\varphi: I^n\to I^n$ で $\varphi(I^{n-1}\times 0)=L$ となるものがあることが L を構成する面の数の帰納法で示せる．この φ を使えば $L=I^{n-1}\times 0=I^{n-1}$ とみなしてよい．$g_t(t_1, \cdots, t_{n-1})=h(t_1, \cdots, t_{n-1}, t)$ とおけば，$p\circ f=g_0$ であるから，I^{n-1} に関する被覆ホモトピー性質から，$f_0=f$, $p\circ f_t=g_t$ をみたす $f_t: I^{n-1}\to E$ がある．$\bar{f}(t_1, \cdots, t_{n-1}, t)=f_t(t_1, \cdots, t_{n-1})$ とおけば $\bar{f}$ は求める写像である．(終)

G を係数群とするファイバーのホモロジー群について，

$$w_*=(w_\#{}^{-1})_*\,;\ H_n(F_{w(1)}\,;G)\longrightarrow H_n(F_{w(0)}\,;G)$$

とおく．R を係数環とするファイバーのコホモロジー環について，

$$w_*=(w_\#)^*: H^*(F_{w(1)}\,;R)\longrightarrow H^*(F_{w(0)}\,;R)$$

とおく．そのとき，

定理 2.8　上の w_* について，$\{H_n(F_b;\ G)\}_{b\in B}$ は B 上の局所係数群，$\{H^*(F_b\,;R)\}_{b\in B}$ は B 上の局所係数環となる．相対ファイーバ空間 $(E, E_0)\to B$ においては$\{H_n(F_b,\ F_{0,b};\ G)\}$, $\{H^*(F_b,\ F_{0,b};\ R)\}$が局所係数群，環となる．

［証明］　まず，補題 2.6 (2)によって，w_* は S_w のとり方に関係しないことに注意する．定値道 0 に対しては $S_0u=u\circ\pi_1$ とえらべば $0_*=1$. $w\simeq w'\Longrightarrow w_*=w_*'$ は補題 2.6 (2) よりえられる．$w(1)=w'(0)$ のとき，S_w, $S_{w'}$ に対して $S_{w*w'}u$ を

$$S_{w*w'}u(t_1, t_2, \cdots)=\begin{cases} S_w(2t_1,\ t_2,\ \cdots) & (0\leq t_1\leq 1/2) \\ S_{w'}(2t_1-1,\ t_2,\ \cdots) & (1/2\leq t_1\leq 1)\end{cases}$$

で定義すれば，$w_\#\circ w'_\#=(w*w')_\#\Longrightarrow w_*\circ w'_*=(w*w')_*$. 相対ファイバー空間の場合は，$u\in Q_n(F_{0,b})\Longrightarrow S_wu\in Q_{n+1}(E_0)$, $Du\in Q_{n+2}(E_0)$ にとれることに注意すれば同様．(終)

補題 2.9　次の場合，局所係数は自明である(相対ファイバー空間でも同様)：

(1)　B は 1-連結．

(2)　(E, p, B, F, G) は構造群 G が弧状連結なファイバーバンドル．

(3)　係数 $\boldsymbol{k}$ は標数2の体で各ファイバーの(コ)ホモロジー $H(F_b;\ \boldsymbol{k})$ は各次数で0または $\boldsymbol{k}$ に同型．

［証明］　(1)は補題1.18 (1)で示されている．(2)の場合は S_w を次のように構成する．$w: I\to B$ で誘導されたバンドル $w^{\#}E$ は自明なバンドル $I\times F_{w(0)}$ に同値である．$S_w u: I\times I^n \xrightarrow{1\times u} I\times F_{w(0)}\cong w^{\#}E \xrightarrow{\tilde{w}} E$　とおく．このとき，$w_{\#}u$ は u と同相 $F_{w(0)}\cong F_{w(1)}$ の合成であるが，この同相は G のある元 g の作用でひきおこされる．G が弧状連結であるから，g と e を結ぶ道によって，この作用は恒等写像にホモトープである．このことから $w_{\#}\simeq 1$ (F と $F_{w(0)}, F_{w(1)}$ との座標関数による同相を通じて)．(3)の場合は $\boldsymbol{k}$ が素体 $\boldsymbol{Z}_2=\boldsymbol{Z}/2\boldsymbol{Z}$ の場合をみると，w_* は $H(F_b;\ \boldsymbol{Z}_2)$ の自己同型であるが，この場合は w_* は一意的である．一般の $\boldsymbol{k}$ では $H(F_b;\ \boldsymbol{k})\cong H(F_b;\ \boldsymbol{Z}_2)\otimes\boldsymbol{k}$ から w_* はやはり一意的．(終)

Serre のスペクトル系列

後によく使われるコホモロジー環の場合を先にのべる．(E, p, B) はファイバー空間，R は1をもつ可換環で，$\underline{H^*(F;\ R)}=\{H^*(F_b;\ R)\}$ は上に定義した底空間 B の上の局所係数環とする．

定理 2.10　(**Serre の基本定理**)　次の性質をもつ系列 $\{E_r^{p,q}\}$，$p, q\in\boldsymbol{Z}$，$r=2, 3, \cdots, \infty$，と $H^n(E;\ R)$ の部分群の列 $\{D^{p,n-p}\}$ が存在する．

(2.10.1)　$E_r^{p,q}$ は R-加群で積 $E_r^{p,q}\otimes E_r^{p',q'}\to E_r^{p+p',q+q'}$ (準同型) をもつ．

(2.10.2)　準同型 $d_r: E_r^{p,q}\to E_r^{p+r,q-r+1}$ で，$d_r\circ d_r=0$，$d_r(x\cdot y)=d_r x\cdot y+(-1)^p x\cdot d_r y$　$(x\in E_r^{p,q})$ をみたすものがあり，d_r に関するコホモロジー環 $H(E_r^{p,q})$ は $E_{r+1}^{p,q}$ と(積をこめて)同型．

(2.10.3)　$E_2^{p,q}\cong H^p(B;\ \underline{H^q(F;\ R)})$．この同型の左辺の(2.10.1)による積と右辺のコホモロジー環の積は符号 $(-1)^{p'q}$ だけ異なる．

(2.10.4)　$E_r^{p,q}=E_\infty^{p,q}$ $(r>\mathrm{Max}(p, q+1))$

(2.10.5)　$H^*(E;\ R)$ における積は積 $D^{p,q}\otimes D^{p',q'}\to D^{p+p',q+q'}$ を誘導する．

(2.10.6)　$D^{p,q}\supset D^{p+1,q-1}$，$D^{p,q}/D^{p+1,q-1}\cong E_\infty^{p,q}$ (積をこめて同型)

(2.10.7)　$H^n(E;\ R)=D^{0,n}\supset D^{n+1,-1}=0$

(2.10.8)　ファイバー空間の間のファイバー写像 $f: (E, p, B)\to(E', p', B')$

は積を保ち，d_r と可換な準同型 $f_r: {}'E_r^{p,q} \to E_r^{p,q}$ および $f_D: {}'D^{p,q} \to D^{p,q}$ を誘導し，$(f_r)^* = f_{r+1}$，$(f_D)^* = f_\infty$．また，f_2 および $f_D | {}'D^{0,n}$ は上の f から誘導される．

(2.10.9) 射入 $i: F_b \to E$ で誘導される準同型 $i^*: H^n(E;\ R) \to H^n(F_b;\ R)$ は次のように分解される：

$$H^n(E;\ R) = D^{0,n} \xrightarrow{\text{proj}} E_\infty{}^{0,n} = E_{n+2}^{0,n} \subset E_{n+1}^{0,n} \subset \cdots \subset E_2{}^{0,n} = H^0(B;\ \underline{H^n(F;\ R)})$$
$$\xrightarrow{i_0{}^*} H^0(b;\ H^n(F_b;\ R)) = H^n(F_b;\ R)$$

ここで，$i_0: b \to F_b$ は射入．$d_r = 0: E_r{}^{-r,n+r-1} = 0 \to E_r{}^{0,n}$ であるから，$E_{r+1}^{0,n} = H(E_r{}^{0,n}) = \mathrm{Ker}(d_r: E_r{}^{0,n} \to E_r{}^{r,n-r+1}) \subset E_r{}^{0,n}$ とみなせる．

(2.10.10) 射影 $p: E \to B$ で誘導される準同型 $p^*: H^n(B;\ R) \to H^n(E;\ R)$ は次のように分解される：

$$H^n(B;\ R) \xrightarrow{i_*} H^n(B;\ \underline{H^0(F;\ R)}) = E_2{}^{n,0} \xrightarrow{\text{proj}} E_3{}^{n,0} \xrightarrow{\text{proj}} \cdots \xrightarrow{\text{proj}} E_{n+1}^{n,0}$$
$$= E_\infty{}^{n,0} = D^{n,0} \subset H^n(E;\ R)$$

ここで，$i: R \to \underline{H^0(F;\ R)}$ は自明な局所係数環 R から $r \to r \cdot 1_b \in H^0(F_b;\ R)$ で与えられる対応，$d_r = 0: E_r{}^{n,0} \to E_r{}^{n+r,-r+1} = 0$ $(r \geq 2)$ であるから，射影 $E_r{}^{n,0} \to E_r{}^{n,0}/d_r E_r{}^{n-r,r-1} = H(E_r{}^{n,0}) = E_{r+1}^{n,0}$ がある．

(2.10.11) 局所係数環は自明で，F, B は 0-連結とする．従って，$H^n(F_b;\ R) = E_2{}^{0,n}$，$H^{n+1}(B;\ R) = H^{n+1}(B,\ b;\ R) = E_2{}^{n+1,0}$ $(n>0)$ とみてよい．このとき，

$$\begin{array}{ccccc} H^n(F_b;\ R) & \xrightarrow{\delta^*} & H^{n+1}(E,\ F_b;\ R) & \xleftarrow{p^*} & H^{n+1}(B;\ R) \\ \| & & & & \| \\ E_2{}^{0,n} \supset E_{n+1}^{0,n} & \xrightarrow{d_{n+1}} & E_{n+1}^{n+1,0} & \xleftarrow{\kappa} & E_2{}^{n+1,0} \end{array} \quad (\kappa：射影)$$

において，$E_{n+1}^{0,n} = \{x \in H^n(F_b;\ R) \mid \delta^*(x) \in \mathrm{Im}\, p^*\}$ かつ

$$\delta^*(x) = p^*(y) \Longleftrightarrow d_{n+1}(x) = \kappa(y)$$

ここで，若干の補足をする．$E_r = \sum_{p,q} E_r{}^{p,q}$ は全次数 $p+q$ と d_r に関してコチェイン複体となり，そのコホモロジーの列

$$H(E_2) = E_3,\ H(E_3) = E_4,\ \cdots,\ H(E_r) = E_{r+1},\ \cdots$$

がえられる．このような系列 $\{E_r, d_r\}$ を一般に**（コホモロジー）スペクトル系列**という．定理 2.10 のものは **Serre のコホモロジースペクトル系列**といわれる．

通常，局所係数環は自明で，B, F は 0-連結の場合が取り扱われる．そのときには

(2.11)　(1)　(2.10.9)において，$\mathrm{Im}\, i^*=E_\infty{}^{0,n}$,

i^*：全射$\Longleftrightarrow E^{0,n}_{n+2}=E_2{}^{0,n}\Longleftrightarrow d_r=0: E_r{}^{0,n}\to E_r{}^{r,n-r+1}$ $(r=2, 3, \cdots, n+1)$

i^*：単射$\Longleftrightarrow D^{1,n-1}=0\Longleftrightarrow E_\infty{}^{p,n-p}=0$ $(p=1, 2, \cdots, n)$

(2)　(2.10.10)において，$\mathrm{Im}\, p^*=D^{n,0}=E^{n,0}_{n+1}$,

p^*：全射$\Longleftrightarrow D^{n,0}=H^n(E; R)\Longleftrightarrow E_\infty{}^{p,n-p}=0$ $(p=0, 1, \cdots, n-1)$

p^*：単射$\Longleftrightarrow E_2{}^{n,0}=E^{n,0}_{n+1}\Longleftrightarrow d_r=0: E_r{}^{n-r,r-1}\to E_r{}^{n,0}$　$(r=2, 3, \cdots, n)$

定義　(2.10.11)において，$\delta^*(x)\in\mathrm{Im}\, p^*$ となる $H^n(F_b; R)$ の元 x は**転入的**であるといい，$\delta^*(x)=p^*(y)$ となる $y\in H^{n+1}(B; R)$ を x の**転入像**といい，$y=\tau(x)$ で表わす．逆に見た場合には，$\delta^*(x)=p^*(y)$ となる x の存在する y を**懸垂可能**，x を y の**懸垂**といい，$x=\sigma(y)$ で表わす．

(2.12)　E が ∞-連結であれば $\delta^*: H^n(F_b; R)\cong H^{n+1}(E, F_b; R)$ $(n>0)$ であるから，$H^{n+1}(B; R)$ の元はつねに懸垂可能で，$\sigma=\delta^{*-1}\circ p^*$.

$\alpha: H^*(\ ; R)\to H^{*+k}(\ ; R)$ を k 次の安定コホモロジー作用素とすると，$\delta^*(x)=p^*(y)\Longrightarrow\delta^*(\alpha(x))=p^*(\alpha(y))$ であるから，

(2.13)　x が転入的$\Longrightarrow\alpha(x)$ も転入的で，$\alpha(\tau(x))=\tau(\alpha(x))$.

$H^n(E; R)$ の部分群の列 $D^{p,n-p}$ の剰余群の直和としてえられる $\sum E_\infty{}^{p,n-p}$ は $H^n(E; R)$ に附随した有階加群といわれる．これを

$$E_\infty=Gr(H^n(E; R)),\quad (E_\infty=\sum E_\infty{}^{p,q})$$

で表わすことがある．また，E_2 よりコホモロジーの列をとって E_∞ に至る経過を図式的に

$$E_2=H^*(B; \underline{H^*(F; R)})\Longrightarrow H^*(E; R)$$

で表わして，スペクトル系列 $\{E_r\}$ は $H^*(E; R)$ に**収束**するという．

定理 2.14　**(Serreの完全系列)**　m, n は正の整数とする．ファイバー空間 (E, p, B) において，B, F は0-連結，局所係数環 $\underline{H^*(F; R)}$ は自明，$H^i(B; R)=0$ $(0<i<m)$, $H^j(F; R)=0$ $(0<j<n)$ ならば次の完全系列がある：

$$0\longrightarrow H^1(B; R)\xrightarrow{p^*}H^1(E; R)\xrightarrow{i^*}\cdots\xrightarrow{\tau}H^k(B; R)\xrightarrow{p^*}H^k(E; R)\xrightarrow{i^*}$$
$$H^k(F; R)\xrightarrow{\tau}H^{k+1}(B; R)\xrightarrow{p^*}\cdots\xrightarrow{p^*}H^{m+n-1}(E; R)\xrightarrow{i^*}H^{m+n-1}(F; R)$$

［証明］　仮定から，$E_2{}^{p,0}\cong H^p(B; R)$, $E_2{}^{0,q}\cong H^q(F; R)$ および $p\neq0$, $q\neq0$, $p+q<m+n$ のとき $E_2{}^{p,q}=0\Longrightarrow E_r{}^{p,q}=0$ $(r\geq2)$. $E_\infty{}^{p,q}=0\Longleftrightarrow D^{p,q}=D^{p+1,q-1}$ で

あるから，$k<m+n \Longrightarrow D^{1,k-1}=D^{k,0}=E_\infty{}^{k,0} \Longrightarrow 0 \to E_\infty{}^{k,0} \subset H^k(E;\ R) \to E_\infty{}^{0,k} \to 0$ は完全．$p+q<m+n-1$ の範囲で $d_r: E_r{}^{p,q} \to E_r{}^{p+r,q-r+1}$ が 0 でない可能性は $d_r: E_r{}^{0,r-1} \to E_r{}^{r,0}$ のみであるから，$k<m+n$ のとき $E_2{}^{k,0}=E_k{}^{k,0}$，$E_{k+1}^{k,0}=E_\infty{}^{k,0}$，$E_2{}^{0,k-1}=E_k{}^{0,k-1}$，$E_{k+1}^{0,k-1} \to E_\infty{}^{0,k-1}$ および $0 \to E_{k+1}^{0,k-1} \longrightarrow E_k{}^{0,k-1} \xrightarrow{d_k} E_k{}^{k,0} \longrightarrow E_{k+1}^{k,0} \to 0$ は完全．これらを組合わせて定理の完全系列がえられる．　(終)

補題 2.15　局所係数環 $H^*(F;\ R)$ は自明，B，F は 0-連結，$H^*(B;\ R)$ または $H^*(F;\ R)$ は各次元で有限生成 R-自由加群とする．このとき積 $E_2{}^{p,0} \otimes E_2{}^{0,q} \to E_2{}^{p,q}$ は同型

$$H^p(B;\ R) \otimes_R H^q(F;\ R) \cong E_2{}^{p,q}$$

を誘導する．

証明は直和因子に分解して考えればよい．以後実際にスペクトル系列を適用するのは概ねこの補題の成り立つ場合である．$b \in H^p(B;\ R)$，$f \in H^q(F;\ R)$ について，$b \otimes f$ に対応する元を同じ記号 $b \otimes f \in E_2{}^{p,q}$ で表わす．もとの b, f は $b \otimes 1 \in E_2{}^{p,0}=H^p(B;\ R)$, $1 \otimes f \in E_2{}^{0,q}=H^q(F;\ R)$ と同一視される．また，$d_i(b \otimes f)=0$，$2 \leq i<r$，のときその類を $\kappa_2{}^r(b \otimes f) \in E_r{}^{p,q}$ で表わすが，$\kappa_2{}^r$ を省略して $b \otimes f \in E_r{}^{p,q}$ と表わすことも多い．例えば，$\tau(f)=b \Longleftrightarrow d_p(1 \otimes f)=b \otimes 1$ $(q=p-1)$，$d_r(b \otimes f)=d_r b \otimes f+(-1)^p b \otimes d_r f$，等が成り立つ．

定理 2.16　相対ファイバー空間 $(F,\ F_0) \xrightarrow{i} (E,\ E_0) \xrightarrow{p} B$ の場合は Serre の基本定理 2.10 の (2.10.1)～(2.10.9) が，E, F をそれぞれ $(E,\ E_0)$，$(F,\ F_0)$ でおきかえて成立する．さらに，このスペクトル系列を $\{'E_r{}^{p,q}\}$，$(E,\ p,\ B)$ に関するスペクトル系列を $\{E_r{}^{p,q}\}$ とするとき，積 $E_r{}^{p,q} \otimes 'E_r{}^{p',q'} \to 'E_r{}^{p+p',q+q'}$，$D^{p,q} \otimes 'D^{p',q'} \to 'D^{p+p',q+q'}$ があり，積 $H^q(F;\ R) \otimes H^{q'}(F,\ F_0;\ R) \to H^{q+q'}(F,\ F_0;\ R)$，$H^n(E;\ R) \otimes H^{n'}(E,\ E_0;\ R) \to H^{n+n'}(E,\ E_0;\ R)$ に関して定理 2.10 と同様な関係をもつ．

ホモロジースペクトル系列

ホモロジー群についても，コホモロジーと双対的なスペクトル系列があるが一般には積構造が導入されないので，応用面では若干劣る．

定理 2.17　相対ファイバー空間 $F \xrightarrow{i} (E,\ E_0) \xrightarrow{p} (B,\ B_0)$ と係数環 R に対して，次の性質をもつ系列 $\{E^r{}_{p,q}\}$，$p, q \in \boldsymbol{Z}$；$r=2, 3, \cdots, \infty$，と $H_n(E,\ E_0;\ R)$

の部分 R-加群 $D_{p,n-p}$ の列がある．

(2.17.1) 準同型 $d^r: E^r_{p,q}\to E^r_{p-r,q+r-1}$ で $d^r\circ d^r=0$ をみたすものがあって，d^r に関するホモロジーとして $H(E^r_{p,q})\cong E^{r+1}_{p,q}$.

(2.17.2) $E^2_{p,q}\cong H_p(B,\ B_0;\ \underline{H_q(F;\ R)})$

(2.17.3) $E^r_{p,q}=E^\infty_{p,q}\quad (r>\mathrm{Max}(p,\ q+1))$

(2.17.4) $D_{p-1,q+1}\subset D_{p,q},\ \ D_{p,q}/D_{p-1,q+1}\cong E^\infty_{p,q}$

(2.17.5) $H_n(E,\ E_0;\ R)=D_{n,0}\supset D_{-1,n+1}=0$

(2.17.6) ファイバー写像はスペクトル系列 $\{E^r_{p,q}\}$ の間の自然な対応を誘導する．

(2.17.7) $B_0=E_0=\phi$ のとき，射入 $i: F\to E$ で誘導される準同型 i_* は次のように分解される：

$$H_n(F;\ R)=H_0(b;\ H_n(F;\ R))\xrightarrow{i_{b*}}H_0(B;\ H_n(F;\ R))\cong E^2_{0,n}\xrightarrow{\text{proj}}E^3_{0,n}$$
$$\longrightarrow\cdots\xrightarrow{\text{proj}}E^{n+2}_{0,n}=E^\infty_{0,n}=D_{0,n}\subset H_n(E;\ R)$$

(2.17.8) 射影 p で誘導される準同型 p_* は次のように分解される：

$$H_n(E,\ E_0;\ R)=D_{n,o}\xrightarrow{\text{proj}}E^\infty_{n,0}=E^{n+1}_{n,0}\subset\cdots\subset E^3_{n,0}\subset E^2_{n,0}$$
$$=H_n(B,\ B_0;\ H_0(F;\ R))\xrightarrow{\text{proj}}H_n(B,\ B_0;\ R)$$

(2.17.9) (2.10.11) と双対的な $H_n(F_b;\ R)\xleftarrow{\partial}H_{n+1}(E,\ F_b;\ R)\xrightarrow{p_*}H_{n+1}(B;\ R)$ と $d_{n+1}: E^{n+1}_{n+1,0}\to E^{n+1}_{0,n}$ の間の関係がある．

定義 ファイバー空間 $(E,\ p,\ B)$ が**主ファイバー空間**$\Longleftrightarrow$ファイバー F は H-空間で，E に作用し，その作用 $\mu: E\times F\to E$ は $p\mu(e,\ f)=p(e)$ をみたす．

主バンドル $(F=G)$ や道のファイバー空間 $(\Omega(X,\ A,\ x_0),\ p_0,\ A)$ $(F=\Omega(X))$ は，主ファイバー空間の例である．

定理 2.18 主ファイバー空間においては，スペクトル系列 $\{E_r{}^{p,q}\}$ にホモロジー環 $H_*(F;\ R)$ が作用し：$E^r_{p,q}\otimes H_s(F;\ R)\to E^r_{p,q+s}$ コホモロジーの場合と類似の性質(例：$d^r(x\cdot y)=d^r(x)\cdot y$) をもつ．

スペクトル系列の構成

Serre の基本定理の証明の大筋をのべる．詳細については，原論文 [17]を参照されたい．

ファイバー空間 $(E,\ p,\ B)$の全空間 E のチェイン複体 $C_*(E)=Q_*(E)/D_*(E)$

に，次のような部分チェイン複体 $A_p=\sum_q A_{p,q}$ の列を導入する．

定義　$A_{p,q}$ は $(p\circ u)(t_1, \cdots, t_{p+q})$ において，後尾の q 個の座標 $t_{p+1}, \cdots, t_{p+q}$ に無関係な $u: I^{p+q} \longrightarrow E$ で生成される $C_{p+q}(E)$ の部分群．

このとき $A_p \supset A_{p-1}$，$d(A_p) \subset A_p$ が成り立つ．

ホモロジースペクトル系列の場合は $A'_{p,q}=A_{p,q}\otimes G$; $\partial=d\otimes 1$ とおき，

$$Z^r_{p,q}=A'_{p,q}\cap\partial^{-1}(A'_{p-r,\,q+r-1}),\qquad B^r_{p,q}=A'_{p,q}\cap\partial(A'_{p+r,\,q-r+1})$$

$$E^r_{p,q}=Z^r_{p,q}/(Z^{r-1}_{p-1,q+1}+B^{r-1}_{p,q})$$

$$D_{p,q}=\mathrm{Im}(i_*: H_{p+q}(A_p;\ G)\longrightarrow H_{p+q}(E;\ G))$$

と定義する．d^r は ∂: $Z^r_{p,q}\to B^r_{p-r,q+r-1}$ から誘導されるものとして定義する．

コホモロジースペクトル系列の場合は $C^{p+q}(E;\ R)=\mathrm{Hom}(C_{p+q}(E),\ R)$ の部分群 $A^{p,q}=\{f\in\mathrm{Hom}(C_{p+q}(E),\ R)\mid f(A_{p-1,q+1})=0\}$，$A^{p,q}\subset A^{p-1,q+1}$ と $\delta: A^{p,q} \to A^{p,q+1}$，$\delta(f)=f\circ\partial$，について，

$$Z_r^{p,q}=A^{p,q}\cap\delta^{-1}(A^{p+r,q-r+1}),\qquad B_r^{p,q}=A^{p,q}\cap\delta A^{p-r,q+r-1}$$

$$E_r^{p,q}=Z_r^{p,q}/(Z^{p+1,q-1}_{r-1}+B^{p,q}_{r-1})$$

$$D^{p,q}=\mathrm{Ker}(i^*: H^{p+q}(E;\ R)\to H^{p+q}(A_{p-1};\ R))$$

$d_r: E_r^{p,q}\to E_r^{p+r,q-r+1}$ は $\delta: Z_r^{p,q}\to B_r^{p+r,q-r+1}$ から誘導されるものとして定義する．

以下，主としてコホモロジーの場合について述べる．カップ積の定義を検討すれば，$f\in A^{p,q}$，$g\in A^{p',q'} \Longrightarrow f\cdot g\in A^{p+p',q+q'}$，$\delta(f\cdot g)=\delta f\cdot g+(-1)^{p+q}f\cdot\delta g$ を使えば積 $E_r^{p,q}\otimes E_r^{p',q'}\to E_r^{p+p',q+q'}$ が誘導されることがわかる．このとき，(2.10.i)，$i=1, 2, 4, 5, 6, 7$，は全く代数的な帰結である．最も面倒なのは (2.10.3) の証明である．まず，次が容易にわかる．

(2.19)　$E_0^{p,q}\cong C^{p+q}(A_p/A_{p-1};R)$，$E_1^{p,q}\cong H^{p+q}(A_p/A_{p-1};\ R)$，かつ d_1 は三対 $(A_{p+1},\ A_p,\ A_{p-1})$ の境界準同型 $\delta^*: H^{p+q}(A_p/A_{p-1};\ R)\to H^{p+q+1}(A_{p+1}/A_p;\ R)$ と同値．

定義　$A_{p,q}$ に属する $u: I^{p+q}\to E$ に対して　$(b=Bu(0, \cdots, 0))$

$$Bu: I^p \longrightarrow B \Longleftrightarrow Bu(t_1, \cdots, t_p)=(p\circ u)(t_1, \cdots, t_p, *, \cdots, *)$$

$$Fu: I^q \longrightarrow F_b \Longleftrightarrow Fu(t_1, \cdots, t_q)=u(0, \cdots, 0, t_1, \cdots, t_q)$$

と定義する．

$C^p(B;\ \underline{C^q(F;\ R)})$ を $C_p(B)$ の各 $w: I^p\to B$ に対して $C^q(F_b;\ R)$，$b=w(0,$

$\cdots, 0)$，の元 $f(w)$ を対応させる関数 f 全体の作る R-加群とし，$(\delta_0 f)(w)=(-1)^p\delta(f(w))$ によってコチェイン複体とする．このとき，$(\varphi f)u=(f(Bu))(Fu)$ によって準同型

$$\varphi : C^p(B;\ \underline{C^q(F;\ R)})\longrightarrow E_0^{p,q}=\mathrm{Hom}(A_{p,q}/A_{p-1,q+1},\ R)$$

が定義され，$d_0\circ\varphi=\varphi\circ\delta_0$ をみたすことは，$u\in A_{p-1,q+1}\Longrightarrow Bu$：退化，および $u\in A_{p,q+1}$，$i\leq p\Longrightarrow\partial_i^\varepsilon u\in A_{p-1,q+1}$ よりわかる．よって，φ は準同型

$$\Phi : C^p(B;\ \underline{H^q(F;\ R)})\longrightarrow E_1^{p,q}=H(E_0^{p,q})$$

を誘導する．この左辺は局所係数による δ，右辺は d_1 についてコチェイン複体とみる．

補題 2.20　$\Phi : C^*(B;\ \underline{H^*(F;\ R)})\cong E_1=\sum E_1^{p,q}$　はコチェイン複体の同型で，積については，$\Phi(f\cdot g)=(-1)^{p'q}\Phi(f)\cdot\Phi(g)$.

この補題の証明のモデルは補題 2.6 の証明である．φ は対応 $u\rightarrow(Bu,\ Fu)$ をもとに作られているから，φ の逆対応 ψ で $\psi\circ\varphi=1$ となるものを作るには w : $I^p\rightarrow B$，v : $I^q\rightarrow F_b$，$b=w(0,\ \cdots,\ 0)$，の対 $(w,\ v)$ から $K(w,\ v)$: $I^{p+q}\rightarrow E$ で，補題 2.6(1) の条件と類似な

(i)　$BK(w,v)=w$，$FK(w,v)=v$

(ii)　$\partial_{p+i}^\varepsilon K(w,\ v)=K(w,\ \partial_i^\varepsilon v)$

(iii)　$K(w'\circ\pi_k,v)=K(w,\ v)\circ\pi_k$，$K(w,\ v'\circ\pi_k)=K(w,\ v')\circ\pi_{p+k}$

をみたすものを構成すればよい．また $\varphi\circ\psi\simeq1$ を示すには，u と $K(Bu,\ Fu)$ の間のホモトピー D を構成すればよい．ここで補題 2.7 に相当するものは，

(2.21)　補題 2.7 は $(I^n, L)=(I^p\times I^q,\ I^p\times\partial I^q\cup0\times I^q)$，$=(I\times I^p\times I^q,\ \partial I\times I^p\times I^q\cup I\times I^p\cup\partial I^q\cup I\times0\times I^q)$ に対しても成り立つ．

これは補題 2.7 を何回か繰り返して証明できる．

Serre の基本定理 2.10 のその他の部分は，代表元をとって直接確かめられる．

相対ファイバー空間の場合（定理 2.16）は $C^n(E,\ E_0;\ R)=\{f\in C^n(E;\ R)=\mathrm{Hom}(C_n(E),\ R)\mid f(C_n(E_0))=0\}$ から出発して同様に示される．

ホモロジーの場合には，$u\otimes1\rightarrow Bu\otimes Fu\otimes1$ で与えられる φ : $E_0^{p,q}=(A_{p,q}/A_{p-1,q+1})\otimes G\rightarrow C_p(B;\ \underline{C_q(F;\ G)})$ より出発して双対的に議論が進められる．

§3 Gysin 完全系列の応用

Thom 同型

$$(F, F_0) \xrightarrow{i} (E, E_0) \xrightarrow{p} B$$

を相対ファイバー空間，R は 1 をもつ可換環，$(F_b, F_{0,b})=(b \in B$ 上のファイバー) とする.

定 理3.1 $H^q(F_b, F_{0,b}; R)=0\ (q \neq n,\ b \in B)$ と仮定する.

(1) $H^p(B; \underline{H^n(F, F_0; R)}) \cong H^{p+n}(E, E_0; R)$ （R-加群の同型)

(2) さらに，$H^n(F_b, F_{0,b}; R) \cong R\ (b \in B)$ と仮定する. 局所係数環 $\underline{H^n(F, F_0; R)}$ が自明$\Longleftrightarrow$各射入 $i_b : (F_b, F_{0,b}) \to (E, E_0)$ について $i_b{}^*(U)$ は R-加群 $H^n(F_b, F_{0,b}; R)$ の生成元となるような $U \in H^n(E, E_0; R)$ が存在する. このような U について，対応 $x \to p^*(x) \cdot U$ ($p^* : H^n(B; R) \to H^n(E; R)$) は同型

$$H^p(B; R) \cong H^{p+n}(E, E_0; R)$$

を与える.

［証明］ (1) 相対ファイバー空間に関するスペクトル系列

$$E_2 = H^*(B; \underline{H^*(F, F_0; R)}) \Longrightarrow H^*(E, E_0; R)$$

を考える. 仮定から $E_2{}^{p,q}=0\ (q \neq n) \Longrightarrow E_r{}^{p,q}=0\ (q \neq n,\ r \geq 2)$. $d_r : E_r{}^{p,q} \longrightarrow E_r{}^{p+r,q-r+1} (r \geq 2)$ において，$q \neq n$ または $q-r+1 \neq n$ であるから，$d_r=0\ (r \geq 2)$ $\Longrightarrow E_2{}^{p,n}=E_3{}^{p,n}=\cdots=E_\infty{}^{p,n} \cong D^{p,n}/D^{p+1,n-1}$. 一方, $E_\infty{}^{p,q}=0\ (q \neq n) \Longrightarrow H^{p+n}(E, E_0; R)=D^{0,p+n}=D^{p,n}$, $D^{p+1,n-1}=0$. よって，$H^p(B; \underline{H^n(F, F_0; R)})=E_2{}^{p,n} \cong H^{p+n}(E, E_0; R)$.

(2) 前半は補題 1.18 (3)を B の各弧状成分について適用すればわかる. 後半はファイバー空間 (E, p, B) のスペクトル系列$\{'E_r\}$との積 $'E_r \otimes E_r \to E_r$ を考えることによって，(1)の同型を φ とするとき，積との間に可換な図式

$$\begin{array}{ccc}
H^p(B; R) \otimes H^0(B; \underline{H^n(F, F_0; R)}) & \xrightarrow{p^* \otimes \varphi} & H^p(E; R) \otimes H^n(E, E_0; R) \\
\downarrow \mu & & \downarrow \\
H^p(B; \underline{H^n(F, F_0; R)}) & \xrightarrow{\varphi} & H^{p+n}(E, E_0; R)
\end{array}$$

がえられる. ただし左の列では(2.10.10)の $j_* : H^n(B; R) \to H^n(B; \underline{H^0(F; R)})$ を用いている. $\varphi(u)=U$ となる $u \in H^0(B; \underline{H^n(F, F_0; R)})=Z^0(B; H^n(F, F_0;$

R)) について，$r \to r \cdot u(b) \in H^n(F_b, F_{0,b}; R)$ は局所係数環の自明性を与え，補題 1.18 (2) とその証明によって，$x \to \mu(x \otimes u)$ は同型 $H^p(B; R) \cong H^p(B; \underline{H^n}$ $\underline{(F, F_0; R)})$ を与えている．図式の可換性から $x \to p^*(x) \cdot \varphi(u) = p^*(x) \cdot U$ は(2)の同型を与える．　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　(終)

定義　定理 3.1(2)によって規定される $U \in H^n(E, E_0; R)$ を **Thom 類**という．定理 3.1 の(1)および(2)の同型は **Thom 同型**とよばれる．

(3.2)　Thom 類 U, U' をもち，同じファイバー (F, F_0) と構造群 G をもつ相対ファイバーバンドル $((E, E_0), p, B)$, $((E', E_0'), p', B')$ の間のバンドル写像 $f : (E, p, B) \to (E', p', B')$, $f|E_0 : (E_0, p_0, B) \to (E_0', p_0', B')$ があるとき，$f^* : H^n(E', E_0'; R) \to H^n(E, E_0; R)$ について，$f^*U' = U$ となるように U' をとり直すことができる．

(3.3)　Thom 類 U, U' をもつ相対ファイバーバンドル $((E, E_0), p, B, (F, F_0), G)$, $((E', E_0'), p', B', (F', F_0'), G')$ の直積として相対ファイバーバンドル $((E \times E', E \times E_0' \cup E_0 \times E'), p \times p', B \times B', (F \times F', F \times F_0' \cup F_0 \times F'), G \times G')$ がえられ，U と U' のクロス積 $U \times U' \in H^{n+n'}(E \times E', E \times E_0' \cup E_0 \times E'; R)$ は後者の Thom 類である．

これらは特に，ベクトルバンドル $(E, p, B, \boldsymbol{F}^n, G)$, $G \subset GL(n, \boldsymbol{F})$, において，0-切断 $s_0 : B \to E$ $(s_0(b) = \boldsymbol{0} \in \boldsymbol{F}_b{}^n)$ の像の補集合 $E_0 = E - s_0(B)$ からえられる相対ベクトルバンドル

$$((E, E_0), p, B, (\boldsymbol{F}^n, \boldsymbol{F}^n - \boldsymbol{0}), G), \quad G \subset GL(n, \boldsymbol{F})$$

に適用される．ここで，$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{H}$ または $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{R}$ でも補題 2.9 が適用できる場合には，局所係数環は自明で，Thom 類が存在する．$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{R}$, $R = \boldsymbol{Z}$ の場合，局所係数環 $\underline{H^n(\boldsymbol{R}^n, \boldsymbol{R}^n - \boldsymbol{0}; \boldsymbol{Z})}$ が自明なときは，ベクトルバンドル $(E, p, B, \boldsymbol{R}^n, G)$ は**可符号**であるといわれる．

Gysin 完全系列

ファイバーバンドル (E, p, B, F, G) において，p の写像柱 $\hat{E} = Z_p$ を考えると，補題 2.5 により相対ファイバーバンドル

$$((\hat{E}, E), \pi, B, (\hat{F}, F), G)$$

がえられ，B は $\hat{E}$ の変位レトラクト，$\hat{F}$ は可縮であるから，

(3.4)　$i^*=\pi^{*-1}: H^*(\hat{E};\ R)\cong H^*(B;\ R)$

$\delta^*: H^{n-1}(F,\ 1\text{点};\ R)\cong H^n(\hat{F},\ F;\ R)$

定義　上の相対ファイバーバンドルが Thom 類 $U\in H^n(\hat{E},\ E;\ R)$ をもつとき，U の $H^n(\hat{E},\ E;\ R)\xrightarrow{j^*}H^n(\hat{E};\ R)\xrightarrow{i^*}H^n(B;\ R)$ による像 χ をファイバーバンドル $(E,\ p,\ B,\ F,\ G)$ の **Euler 類**という．次の定理における完全系列を **Gysin 完全系列**という．

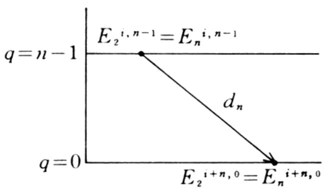
定理 3.5　ファイバーバンドル $(E,\ p,\ B,\ F,\ G)$ において，局所係数環 $\underline{H^*(F;\ R)}$ は自明，かつ $H^*(F;\ R)\cong H^*(S^{n-1};\ R)$，$n\geq 1$，とすれば次の性質をもつ完全系列

$$\cdots\xrightarrow{p^*}H^{i+n-1}(E;\ R)\xrightarrow{\lambda}H^i(B;\ R)\xrightarrow{\chi\cdot}H^{i+n}(B;\ R)\xrightarrow{p^*}H^{i+n}(E;\ R)\longrightarrow\cdots$$

が存在する．$\chi\in H^n(B;\ R)$ は Euler 類で，$\lambda(p^*x\cdot y)=x\cdot\lambda(y)$．

［証明］　対 $(\hat{E},\ E)$ に関するコホモロジー完全系列を Thom 同型と (3.4) の最初の同型でおきかえたものが Gysin 完全系列である．　（終）

注意 3.6　定理 3.5 は，ファイバー空間 $(E,\ p,\ B)$ についても，$n>1$ の場合に成り立つ．証明は $(E,\ p,\ B)$ のスペクトル系列 $\{E_r^{p,q}\}$ において，$E_n^{i,n-1}\cong H^i(B;\ R)$，$E_n^{i+n,0}\cong H^{i+n}(B;\ R)$，$0\to E_\infty^{i+n,0}\to H^{i+n}(E;\ R)\to E_\infty^{i+1,n-1}\to 0$ は完全，$E_\infty^{i+n,0}=E_{n+1}^{i+n,0}$，$E_\infty^{i,n-1}=E_{n+1}^{i,n-1}$ 等よりえられる．λ は d_n に相当している．



よく使われるのは球バンドル $(E,\ p,\ B,\ S^{n-1},\ G)$ の場合である．(3.2) より，

(3.7)　バンドル写像　$f:(E,\ p,\ B,\ S^{n-1},\ G)\to(E',\ p',\ B',\ S^{n-1},\ G)$ について，図式

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots\xrightarrow{p'^*} & H^{i+n-1}(E';\ R) & \xrightarrow{\lambda'} & H^i(B';\ R) & \xrightarrow{\chi'\cdot} & H^{i+n}(B';\ R) & \xrightarrow{p'^*}\cdots \\
 & \downarrow f^* & & \downarrow \bar{f}^* & & \downarrow \bar{f}^* & \\
\cdots\xrightarrow{p^*} & H^{i+n-1}(E;\ R) & \xrightarrow{\lambda} & H^i(B;\ R) & \xrightarrow{\chi\cdot} & H^{i+n}(B;\ R) & \xrightarrow{p^*}\cdots
\end{array}$$

は可換である．

古典群と Stiefel 多様体のコホモロジー環

Stiefel 多様体 $V_{m+k,k}(\boldsymbol{F})=U(m+k;\ \boldsymbol{F})/U(m;\ \boldsymbol{F})$ のコホモロジーをしらべ

るには，第2章，系2.12よりえられるファイバーバンドル ($k>l>0$)

(3.8) $U(m+l;\ \boldsymbol{F})/U(m;\ \boldsymbol{F}) \xrightarrow{i} U(m+k;\ \boldsymbol{F})/U(m;\ \boldsymbol{F})$
$\xrightarrow{p} U(m+k;\ \boldsymbol{F})/U(m+l;\ \boldsymbol{F})$

が使われる．特に，$l=1$ の場合は $U(m+1;\ \boldsymbol{F})/U(m;\ \boldsymbol{F}) \cong S^{d(m+1)-1}$ (第2章，(3.16))であるから，ファイバー空間

(3.8)′ $S^{d(m+1)-1} \xrightarrow{i} V_{m+k,k}(\boldsymbol{F}) \xrightarrow{p} V_{m+k,k-1}(\boldsymbol{F})$

に関する Gysin 完全系列 ($\chi \in H^{d(m+1)}(V_{m+k,k-1}(\boldsymbol{F});\ R)$ は Euler 類)

(3.9) $\cdots \longrightarrow H^i(V_{m+k,k-1}(\boldsymbol{F});\ R) \xrightarrow{p^*} H^i(V_{m+k,k}(\boldsymbol{F});\ R) \xrightarrow{\lambda}$
$H^{i-d(m+1)+1}(V_{m+k,k-1}(\boldsymbol{F});\ R) \xrightarrow{\chi} H^{i+1}(V_{m+k,k-1}(\boldsymbol{F});\ R) \xrightarrow{p^*} \cdots$

が使われる．ただし，$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{R}$ のときは $R=\boldsymbol{k}$：標数2の体とする．

以後，係数環が $R=\boldsymbol{Z}$ の場合には，簡単のため $\boldsymbol{Z}$ を省略する．

定理 3.10 (1) $H^*(U(m+k)/U(m))=\Lambda(e_{2m+1},\ e_{2m+3},\ \cdots,\ e_{2m+2k-1})$,
$e_{2i-1} \in H^{2i-1}$

(2) $H^*(Sp(m+k)/Sp(m))=\Lambda(e_{4m+3},\ e_{4m+7},\ \cdots,\ e_{4m+4k-1})$, $e_{4i-1} \in H^{4i-1}$

［証明］ $k=1$ のときは $H^*(V_{m+1,1}(\boldsymbol{F})) \cong H^*(S^{d(m+1)-1})=\Lambda(e_{d(m+1)-1})$ で定理は正しい．k に関する帰納法により，$H^*(V_{m+k,m+1}(\boldsymbol{F}))=\Lambda(e_{d(m+2)-1},\ \cdots)$ が正しいとして，$R=\boldsymbol{Z}$ の(3.9)を考える．$\chi \in H^{d(m+1)}(V_{m+k,k-1}(\boldsymbol{F}))=0$ より，

$$0 \to H^i(V_{m+k,k-1}(\boldsymbol{F})) \xrightarrow{p^*} H^i(V_{m+k,k}(\boldsymbol{F})) \xrightarrow{\lambda} H^{i-d(m+1)+1}(V_{m+k,k-1}(\boldsymbol{F})) \to 0$$

は完全．$\lambda(e_{d(m+1)-1})=1 \in H^0(V_{m+k,k-1}(\boldsymbol{F}))$ となる $e_{d(m+1)-1}$ が存在する．$x \in H^*(V_{m+k,k}(\boldsymbol{F})) \Longrightarrow \lambda(x-p^*(\lambda(x))e_{d(m+1)-1})=\lambda(x)-\lambda(x)\cdot 1=0$ より，

$$x=p^*(y)+p^*(z)e_{d(m+1)-1}$$

をみたす $y, z \in H^*(V_{m+k,k-1}(\boldsymbol{F}))$ が存在し，この分解は一意的である．さらに，$e_{d(m+1)-1}^2=-e_{d(m+1)-1}^2$ ($d=2,\ 4$) より $e_{d(m+1)-1}^2=0$ であるから，$p^*(e_{d(m+i)-1})=e_{d(m+i)-1}$ ($i=2,\ \cdots,\ k$) とおいて，定理の正しいことがわかる． (終)

(3.10)′ $U(m+k)/U(m) \cong SU(m+k)/SU(m)$ ($m \geq 1$) に注意する．

系 3.11 $H^*(U(m))=\Lambda(e_1,\ e_3,\ \cdots,e_{2m-1})$, $H^*(SU(m))=\Lambda(e_3,\ e_5,\ \cdots,\ e_{2m-1})$
$H^*(Sp(m))=\Lambda(e_3,\ e_7,\ \cdots,\ e_{4m-1})$

$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{R}$ の場合には，上の証明法は成り立たない．$k=2$ の場合：$V_{m+2,2}(\boldsymbol{R})=O(m+2)/O(m)=SO(m+2)/SO(m)$ ($m \geq 1$) を検討する．

補題 3.12　ファイバー空間 $S^m \xrightarrow{i} O(m+2)/O(m) \xrightarrow{p} S^{m+1}$ において，

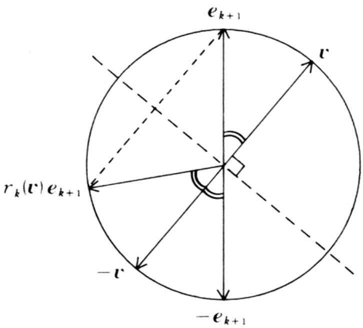
$$\tau(s_m)=\chi=(1+(-1)^{m+1})s_{m+1}$$

ただし，s_k は $H^k(S^k)\cong \boldsymbol{Z}$ の生成元，$m\geq 1$.

［証明］　$\boldsymbol{v}\in S^k\subset \boldsymbol{R}^{k+1}$ に対して，$\boldsymbol{v}$ と直交する超平面に関する鏡映を $r_k(\boldsymbol{v})\in O(k+1)$ とする．即ち，$r_k(\boldsymbol{v})(\boldsymbol{v})=-\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v}'\perp \boldsymbol{v} \Longrightarrow r_k(\boldsymbol{v})(\boldsymbol{v}')=\boldsymbol{v}'$ であり，式で表わせば，$r_k(\boldsymbol{v})(\boldsymbol{v}')=\boldsymbol{v}'-2(\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{v}')\,\boldsymbol{v}$. S^k の中心に関する点対称を $\rho_k: S^k\to S^k$, $\rho_k(\boldsymbol{v})=-\boldsymbol{v}$ とする．S^k の上(下)半球を $E_+{}^k(E_-{}^k)=\{\boldsymbol{v}=(x_1,\ \cdots,\ x_{k+1})\in S^k \mid x_{k+1}\geq 0\ (\leq 0)\}$ で表わす．ここで，$E_+{}^k\cap E_-{}^k=S^{k-1}$ である．射影 $p: O(k+1)\to S^k=O(k+1)/O(k)$ は $p(r)=r(\boldsymbol{e}_{k+1})$, $\boldsymbol{e}_{k+1}=(0,\ \cdots,\ 0,\ 1)$ で与えられる．これらの記号の下に次の成り立つことを示そう．

(3.12)′　$r_\pm=p\circ(r_k|E_\pm{}^k): (E_\pm{}^k,\ S^{k-1})\to(S^k,\ \boldsymbol{e}_{k+1})$ は相対同相である．

$$r_k\circ\rho_k=r_k,\quad r_k|S^{k-1}=r_{k-1}$$



最後の 2 式は自明．$r_k(\boldsymbol{v})\boldsymbol{e}_{k+1}$ は $\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{e}_{k+1}$ を含む 2 次元平面内にあり，$-\boldsymbol{e}_{k+1}$ から $-\boldsymbol{v}$ への大円の弧を 2 倍に伸ばした点が $r_k(\boldsymbol{v})\boldsymbol{e}_{k+1}$ である(右図参照)．このことから，(3.12)′の最初の主張がえられる．

ここで次の合成を考える：

$$s: (E_+{}^{m+1},\ S^m)\xrightarrow{r_{m+1}}(O(m+2),\ O(m+1))\xrightarrow{\text{proj}}(O(m+2)/O(m),\ S^m).$$

$$\begin{array}{ccccc}
H^m(S^m) & \xrightarrow{\delta} & H^{m+1}(O(m+2)/O(m),\ S^{(m)}) & \xleftarrow{p^*} & H^{m+1}(S^{m+1},\ \boldsymbol{e}_{m+2}) \\
\downarrow r_m{}^* & & \downarrow s^* & \swarrow r_+{}^* & \\
H^m(S^m) & \xrightarrow{\delta_0} & H^{m+1}(E_+{}^{m+1},\ S^m) & &
\end{array}$$

上の可換な図式において，δ_0, $r_+{}^*$, p^*, s^* は同型$\Longrightarrow \tau=p^{*-1}\circ\delta$ に関する定理の主張は，$r_m{}^*(s_m)=\pm(1+(-1)^{m+1})s_m$ と同値．同型 $H^m(S^m,\ E_\mp{}^m)\cong H^m(S^m)$ と切除同型 $H^m(S^m,\ E_\mp{}^m)\cong H^m(E_\pm{}^m,\ S^{m-1})$ によって $s_m\in H^m(S^m)$ と対応する生成元を $e_\pm\in H^m(E_\pm{}^m,\ S^{m-1})$ とする．(3.12)′より，$r_\pm{}^*: H^m(S^m)\to H^m(E_\pm{}^m,\ S^{m-1})$ は同型 $\Longrightarrow r_\pm{}^*(s_m)=a_\pm e_\pm$, $a_\pm\in\boldsymbol{Z}$, $|a_\pm|=1$. ρ_m は $m+1$ 個の座標の符号を変えるものであることから，$\rho_m{}^*(s_m)=(-1)^{m+1}S_m$. 上の 3 つの同型は $\rho_m{}^*$ と可換であることから，$a_-=(-1)^{m+1}a_+$ がわかる．$H^m(S^m,S^{m-1})$ を $H^m(E_+{}^m,$

$S^{m-1})\oplus H^m(E_-{}^m, S^{m-1})$ に分解するとき，$j^*: H^m(S^m, S^{m-1})\to H^m(S^m)$ は $j^*(e_+ \oplus e_-)=s_m$ をみたす．$r_m(S^{m-1})=e_{m+1} \Longrightarrow r_m{}^*$ は $H^m(S^m)\longrightarrow H^m(S^m, S^{m-1})\xrightarrow{j^*} H^m(S^m)$ と分解され，$r_m{}^*(s_m)=j^*(a_+e_+\oplus a_-e_-)=a_+(1+(-1)^{m+1})s_m$.　　(終)

系 3.13　$H_m(SO(m+2)/SO(m))\cong \boldsymbol{Z}_2$ (m：奇数)，$\cong \boldsymbol{Z}$ (m：偶数)

注意 3.13′ (1)　上で $a_-=1$, $a_+=(-1)^{m+1}$.

(2)　S^m に ρ_m を作用させると，$S^m/\rho_m=O(m+1)/O(m)\times O(1)\cong P_m(\boldsymbol{R})$. (3.10)′より，$r_m$ は連続な単射 $\bar{r}_m: P_m(\boldsymbol{R})\to O(m+1)$ で $\bar{r}_m|P_{m-1}(\boldsymbol{R})=\bar{r}_{m-1}: P_{m-1}(\boldsymbol{R})\to O(m)$ をみたすものを定義することがわかる．

(3)　m-胞体 $e_m=P_m(\boldsymbol{R})-P_{m-1}(\boldsymbol{R})$ の $\bar{r}_m$ による像を同じ記号 $e_m\subset O(m+1)$ で表わすとき，$O(m+k)$ における積を使って，$\sum i_j$-胞体 $e_{i_1}\cdots e_{i_j}$ ($m\leq i_1<\cdots< i_j<m+k$) を $O(m+k)$ および $O(m+k)/O(m)$ で定義できる．このとき Stiefel 多様体 $O(m+k)/O(m)=SO(m+k)/SO(m)$, $m\geq 1$, は これらの胞体と 0- 胞体 $O(m)/O(m)$ によって有限 CW-複体に分割される．

記号　$A=\Delta_R(x_1, \cdots, x_m)=\Delta(x_1, \cdots, x_m)$ は R 上の有階多元環で $\{x_{i_1}\cdots x_{i_r}: 1\leq i_1<i_2<\cdots<i_r\leq m\}$ が R 上の基底となるものを表わす．

ここで，$x_i{}^2=0$ の条件が加わると A は外積代数 $\Lambda(x_1, \cdots, x_m)$ となる．特に，R の標数 $\neq 2$ かつ各 x_i の次数が奇数 $\Longrightarrow A=\Lambda(x_1, \cdots, x_m)$ である．

定理 3.14　(1)　$\boldsymbol{k}$ が標数 2 の体であれば，

$$H^*(SO(m+k)/SO(m); \boldsymbol{k})=\Delta(e_m, e_{m+1}, \cdots, e_{m+k-1}),\quad e_{m+i}\in H^{m+i}$$

(2)　$\boldsymbol{k}$ が標数 $\neq 2$ の体であれば，

$$H^*(SO(m+k)/SO(m); \boldsymbol{k})=\begin{cases}\Lambda(e_{2m+1}, e_{2m+5}, \cdots, e_{2m+2k-3}) & (m：奇数,\ k：偶数)\\ \Lambda(e_{2m+1}, e_{2m+5}, \cdots, e_{2m+2k-5}, e_{m+k-1}) & (m, k：奇数)\\ \Lambda(e_m, e_{2m+3}, e_{2m+7}, \cdots, e_{2m+2k-3}) & (m：偶数,\ k：奇数)\\ \Lambda(e_m, e_{2m+3}, e_{2m+7}, \cdots, e_{2m+2k-5}, e_{m+k-1}) & (m, k：偶数)\end{cases}$$

[証明]　(1)　この場合には，補題 3.12 より $\chi=0$ であるから，定理 3.10 の証明が適用される．ただし，e_{im+1}^2 は一般には 0 ではない(定理 6.6 参照)．

(2)　k に関する帰納法による．$k=1$ のときは $SO(m+1)/SO(m)=S^m$ より自明．球バンドル

$$S^m \xrightarrow{i} SO(m+k)/SO(m) \xrightarrow{p} SO(m+k)/SO(m+1)$$

において，$SO(m+k)/SO(m+1)$ に帰納法の仮定が使える．

m が偶数のときは $\chi\in H^{m+1}(SO(m+k)/SO(m+1);\ \boldsymbol{k})=0$ であるから 定理 3.10 の証明と同様である．

m が奇数のときは，$\chi\in H^{m+1}(SO(m+k)/SO(m+1);\ \boldsymbol{k})=\{e_{m+1}\}$，$k>1$．上の球バンドルを $SO(m+2)/SO(m)\xrightarrow{p}SO(m+2)/SO(m+1)=S^{m+1}$ に制限して考えれば，補題 3.12 によって，$\chi=\pm 2e_{m+1}$ であることがわかる．$\boldsymbol{k}$ の標数 $\neq 2$ であるから，

$$\cdot\chi : H^*(SO(m+k)/SO(m+1);\ \boldsymbol{k})\longrightarrow H^*(SO(m+k)/SO(m+1);\ \boldsymbol{k})$$

において，$H^*(SO(m+k)/SO(m+1);\ \boldsymbol{k})=\Lambda(e_{m+1})\otimes A$，$A\cong H^*(SO(m+k)/SO(m+2);\ \boldsymbol{k})$ とおけば，$\mathrm{Ker}(\cdot\chi)=\{e_{m+1}\}\otimes A$，$\mathrm{Coker}(\cdot\chi)\cong A$．Gysin 完全系列より，

$$0\longrightarrow A\xrightarrow{p^*}H^*(SO(m+k)/SO(m);\ \boldsymbol{k})\xrightarrow{\lambda}\{e_{m+1}\}\otimes A\longrightarrow 0$$

は完全．e_{2m+1} を $\lambda(e_{2m+1})=e_{m+1}$ にとる．$2m+1$: 奇数 $\Longrightarrow e_{2m+1}^2=0$．あとは定理 3.10 の証明と同様に $H^*(SO(m+k)/SO(m);\ \boldsymbol{k})\cong\Lambda(e_{2m+1})\otimes A$．($e_{2m+1}$ は一意的とは限らない．)　　(終)

系 3.15　(1)　$\boldsymbol{k}$ の標数 $2\Longrightarrow H^*(SO(m);\ \boldsymbol{k})=\Delta(e_1,\ e_2,\ \cdots,\ e_{m-1})$

(2)　$\boldsymbol{k}$ の標数 $\neq 2\Longrightarrow H^*(SO(m);\boldsymbol{k})=\begin{cases}\Lambda(e_3,\ e_7,\ \cdots,\ e_{2m-3}) & (m : \text{奇数})\\ \Lambda(e_3,\ e_7,\ \cdots,\ e_{2m-5},\ e_{m-1}) & (m : \text{偶数})\end{cases}$

(3)　$H^*(O(m);\ \boldsymbol{k})\cong H^*(SO(m);\ \boldsymbol{k})\oplus H^*(SO^-(m);\ \boldsymbol{k})$

ただし，$SO^-(m)=\{A\in O(m)\mid \det A=-1\}\cong SO(m)$　(同相)

古典群の分類空間のコホモロジー環

G を Lie 群，H をその閉部分群とする．第 2 章，§6 によって，これらの分類空間 BG，BH で CW-複体であるものが，ホモトピー同値の意味で一意的にとれる．また，同章 (6.18) のファイバーバンドルを考える：

(3.16)　$$G/H\xrightarrow{i}BH\xrightarrow{p}BG$$

定理 3.17　(1)　$H^*(BU(n))=\boldsymbol{Z}[c_1, c_2,\ \cdots,\ c_n]$，$c_i\in H^{2i}$

(2)　$H^*(BSU(n))=\boldsymbol{Z}[c_2,\ c_3,\ \cdots,\ c_n]$，$c_i\in H^{2i}$

(3)　$H^*(BSp(n))=\boldsymbol{Z}[q_1,\ q_2,\ \cdots,\ q_n]$，$q_i\in H^{4i}$

［証明］　n に関する帰納法によるが，(1)，(3) で $n=0$，(2) で $n=1$ の場合は

$BG=EG$, $G=\{e\}$ と考えて $H^*(BG)=\boldsymbol{Z}$ と解釈する．(2), (3)の証明は同様であるから，(1)を示す．(3.16)で $G=U(n)$, $H=U(n-1)$ とおけば，$G/H=S^{2n-1}$ であるから，Gysin 完全系列

$$\xrightarrow{\lambda} H^j(BU(n)) \xrightarrow{\cdot\chi} H^{j+2n}(BU(n)) \xrightarrow{p^*} H^{j+2n}(BU(n-1)) \xrightarrow{\lambda} H^{j+1}(BU(n)) \longrightarrow$$

がある．$H^*(BU(n-1))$ の生成元 c_i $(1 \leq i \leq n-1)$ について，$\lambda(c_i) \in H^{2i-2n+1}(BU(n))=0 \Longrightarrow c_i$ は p^* の像 $\Longrightarrow p^*$ は全射 $\Longrightarrow$ 次の系列は完全：

$$0 \longrightarrow H^j(BU(n)) \xrightarrow{\cdot\chi} H^{j+2n}(BU(n)) \xrightarrow{p^*} H^{j+2n}(BU(n-1)) \longrightarrow 0$$

$c_i=p^{*-1}(c_i)$ $(1 \leq i < n)$, $c_n=\chi$ とおく．任意の $x \in H^{j+2n}(BU(n))$ に対して，$p^*(x)=f(c_1, \cdots, c_{n-1})$ のとき，$p^*(x-f(c_1, \cdots, c_{n-1}))=0$ であるから，$g \in H^i(BU(n))$ が存在して $x=f(c_1, \cdots, c_{n-1})+g\cdot c_n$. j に関する帰納法により x は $c_1, \cdots, c_n$ の多項式として一意的に書ける．よって $H^*(BU(n))=\boldsymbol{Z}[c_1, \cdots, c_n]$.　(終)

$G=SO(n)$, $H=SO(n-1)$ の場合，$SO(n)$ は連結であるから局所係数環は自明であり，Gysin 完全系列が使える．また，$G=O(n)$, $H=O(n-1)$ の場合にも，$n>1$ かつ $\boldsymbol{k}$ の標数 2 であれば，補題 2.9 (3)によって，局所係数環 $\underline{H^*(S^{n-1}; \boldsymbol{k})}$ は自明である．$n=1$ の場合には $\underline{H^*(S^0; \boldsymbol{k})}$ は自明ではないが，$\underline{H^*(D^1, S^0; \boldsymbol{k})}$ は $\boldsymbol{k}$ の標数 2 のとき自明であるので，Thom 同型が成り立ち，Gysin 完全系列を使うことができる．

補題 3.18　(1)　$H_0(P_n(\boldsymbol{R})) \cong \boldsymbol{Z}$, $H_i(P_n(\boldsymbol{R})) \cong \boldsymbol{Z}_2$ (i は奇数かつ $0<i<n$), $H_n(P_n(\boldsymbol{R})) \cong \boldsymbol{Z}$ (n：奇数)，その他の場合は $H_i(P_n(\boldsymbol{R}))=0$

(2)　$\boldsymbol{k}$：標数 2 の体 $\Longrightarrow H^*(P_n(\boldsymbol{R}); \boldsymbol{k})=\boldsymbol{k}[t]/(t^{n+1})$, $t \in H^1$

$\boldsymbol{k}$：標数 $\neq 2$ の体 $\Longrightarrow H^*(P_n(\boldsymbol{R}); \boldsymbol{k})=\boldsymbol{k}$ (n：偶数),

$H^*(P_n(\boldsymbol{R}); \boldsymbol{k})=\Lambda(s)$, $s \in H^n$ (n：奇数)

(3)　$\boldsymbol{k}$：標数 2 の体 $\Longrightarrow H^*(BO(1); \boldsymbol{k})=\boldsymbol{k}[t]$, $t \in H^1$

$\boldsymbol{k}$：標数 $\neq 2$ の体 $\Longrightarrow H^*(BO(1); \boldsymbol{k})=\boldsymbol{k}$

［証明］　(1)　$e^n=P_n(\boldsymbol{R})-P_{n-1}(\boldsymbol{R})$ とおいて，$P_n(\boldsymbol{R})=e^0 \cup e^1 \cup \cdots \cup e^n$ と胞体分割される．注意 3.13′(2)によって，補題 3.12 の証明は $\partial e^m=(1+(-1)^m)e^{m-1}$ であることを示している．これから(1)がえられる．

(2), (3)　普遍係数定理によって，(2), (3)は加法的には正しいことがわかる．従って，$\boldsymbol{k}$ の標数 $\neq 2$ のときは正しい．$\boldsymbol{k}$ が標数 2 のときは Gysin 完全系列が

ファイバーバンドル $O(1)\to S^n\to P_n(\boldsymbol{R})$ および $O(1)\to EO(1)\to BO(1)$ について使える．前者の場合，$H^i(S^n;\boldsymbol{k})=0$ $(0<i<n)$ より，$0\leq i<n$ について，$\chi\cdot$: $H^i(P_n(\boldsymbol{R});\boldsymbol{k})\to H^{i+1}(P_n(\boldsymbol{R});\boldsymbol{k})$ は単射．$\chi=t$ とおいて(2)の前半がえられる．(3)の前半も同様．　(終)

定理 3.19(1)　$\boldsymbol{k}$: 標数2の体ならば $w_i\in H^i$ があって

$$H^*(BO(n);\boldsymbol{k})=\boldsymbol{k}[w_1, w_2, \cdots, w_n],\ H^*(BSO(n);\boldsymbol{k})=\boldsymbol{k}[w_2, w_3, \cdots w_n]$$

(2)　$\boldsymbol{k}$: 標数$\neq 2$の体ならば，$p_i\in H^{4i}$があって，

$$H^*(BSO(n);\boldsymbol{k})=\begin{cases}\boldsymbol{k}[p_1, p_2, \cdots, p_m] & (n=2m+1 : \text{奇数})\\ \boldsymbol{k}[p_1, p_2, \cdots, p_{m-1}, \chi] & (n=2m : \text{偶数}),\ \chi\in H^{2m}\end{cases}$$

［証明］(1)　定理3.17の証明と同じ方法であるが，$\lambda(w_{n-1})\in H^0\cong\boldsymbol{k}$ であるから，$\chi=w_n\neq 0(\Longrightarrow\lambda(w_{n-1})=0)$ を示す必要がある．

$O(1)$-バンドル $O(1)\longrightarrow S^1\xrightarrow{p} P_1(\boldsymbol{R})=S^1$ の同伴ベクトルバンドル $\xi_1:\boldsymbol{R}\longrightarrow E_1\xrightarrow{\pi} S^1$，および，同伴線分バンドル $D^1\longrightarrow M\xrightarrow{\pi} S^1$ (M : Möbiusの帯) を考える．完全系列

$$H^1(M, \partial M;\boldsymbol{k})\xrightarrow{j^*}H^1(M;\boldsymbol{k})\xrightarrow{i^*}H^1(\partial M;\boldsymbol{k})$$

において，i^* は $p^*: H^1(S^1;\boldsymbol{k})\to H^1(S^1;\boldsymbol{k})$ と同値で，$p^*(x)=2x=0$ であるから，Thom 類 $U_1\in H^1(M, \partial M;\boldsymbol{k})$ の像 j^*U_1 は $H^1(M;\boldsymbol{k})\cong\boldsymbol{k}$ の生成元，従って，$O(1)$-バンドルの Euler 類 χ_1 は $H^1(S^1;\boldsymbol{k})$ の生成元である．ξ_1 の n 個の直積 $\xi_1\times\cdots\times\xi_1$ の同伴球バンドル $\xi: S^{n-1}\to E_n\to S^1\times\cdots\times S^1$ の Euler 類は(3.3)を用いて $\chi_1\times\cdots\times\chi_1\neq 0$ であることがわかる．$S^{n-1}\to BO(n-1)\to BO(n)$ は普遍ファイバーバンドルであるから ξ を誘導する連続写像 $f: S^1\times\cdots\times S^1\to BO(n)$ がある．(3.7)を用いて，$f^*(\chi)=\chi_1\times\cdots\times\chi_1\neq 0\Longrightarrow\chi=w_n\neq 0$.

従って，$H^*(BO(n);\boldsymbol{k})=\boldsymbol{k}[w_1, w_2, \cdots, w_n]$ は補題3.18(3)より出発して，帰納的に証明される．

$BSO(n)$ については，まず $SO(2)\cong U(1)\Longrightarrow H^1(BSO(2);\boldsymbol{k})\cong H^1(BU(1);\boldsymbol{k})=0$. $n>2$ についても，Gysin 完全系列から容易に $H^1(BSO(n);\boldsymbol{k})=0$. $O(n)/SO(n)\cong O(1)$ であるから，$O(1)\to BSO(n)\xrightarrow{p} BO(n)$ に関する Gysin 完全系列

$$\cdots\xrightarrow{\lambda}H^i(BO(n);\boldsymbol{k})\xrightarrow{\chi\cdot}H^{i+1}(BO(n);\boldsymbol{k})\xrightarrow{p^*}H^{i+1}(BSO(n);\boldsymbol{k})\xrightarrow{\lambda}\cdots$$

がある．$H^1(BSO(n);\boldsymbol{k})=0\Longrightarrow\chi\neq 0\Longrightarrow\chi=w_1\Longrightarrow\chi\cdot$は単射$\Longrightarrow p^*$: 全射．故に，$H^*(BSO(n);\boldsymbol{k})\cong H^*(BO(n);\boldsymbol{k})/\mathrm{Im}(\chi\cdot)=\boldsymbol{k}[w_1, w_2, \cdots, w_n]/(w_1)$

$=\boldsymbol{k}[w_2, \cdots, w_n]$. $p^* w_i = w_i$, $2 \le i \le n$, とおいて(1)の後半がえられる.

(2)で n が奇数の場合は $n=2m+1$ とおき, $m \ge 1$ に関する帰納法で示す. ファイバーバンドル $SO(2m+1)/SO(2m-1) \to BSO(2m-1) \to BSO(2m+1)$ において, 定理3.14 (2)によって $H^*(SO(2m+1)/SO(2m-1); \boldsymbol{k}) \cong H^*(S^{4m-1}; \boldsymbol{k})$. $BSp(m)$ の場合と同様に完全系列

$$0 \longrightarrow H^i(BSO(2m+1); \boldsymbol{k}) \xrightarrow{\chi\cdot} H^{i+4m}(BSO(2m+1); \boldsymbol{k}) \xrightarrow{p^*} H^{i+4m}(BSO(2m-1); \boldsymbol{k}) \longrightarrow 0$$

から, $H^*(BSO(2m+1); \boldsymbol{k})$ が求められる. ここで, p は $BSO(2m-1) \xrightarrow{p'} BSO(2m) \to BSO(2m+1)$ と分解され, p^* は全射であるから, 球バンドル $S^{2m-1} \longrightarrow BSO(2m-1) \xrightarrow{p'} BSO(2m)$ に関する Gysin 完全系列において p'^* は全射となり, 完全系列

$$0 \to H^i(BSO(2m); \boldsymbol{k}) \xrightarrow{\chi\cdot} H^{i+2m}(BSO(2m); \boldsymbol{k}) \xrightarrow{p'^*} H^{i+2m}(BSO(2m-1); \boldsymbol{k}) \to 0$$

がえられる. これから $H^*(BSO(2m); \boldsymbol{k})$ が定理3.17と同様に求められる. (終)

注意 3.20　$\boldsymbol{k}$: 標数 $\neq 2$ の体 $\Longrightarrow H^*(BO(n); \boldsymbol{k}) \cong H^*(BSO(n); \boldsymbol{k})$

$BU(1, \boldsymbol{F}) = P_\infty(\boldsymbol{F})$ のコホモロジー環はすでにえられている. 有限次元の場合は補題3.18および次のようになる:

(3.21)　$H^*(P_n(\boldsymbol{C})) = \boldsymbol{Z}[t]/(t^{n+1})$, $t \in H^2$, $H^*(P_n(\boldsymbol{H})) = \boldsymbol{Z}[t]/(t^{n+1})$, $t \in H^4$

これらは $P_n(\boldsymbol{F})$ が $P_\infty(\boldsymbol{F})$ の dn-切片であることから自明であるが, 球バンドル $S^{d-1} \to S^{dn-1} \to P_n(\boldsymbol{F})$ の Gysin 完全系列を用いても示すことができる.

§4　Leray-Hirsch の定理と Weyl 群の作用

スペクトル系列が自明となる条件

定義　スペクトル系列 $\{E_r, d_r\}$ が**自明** $\Longleftrightarrow d_r = 0\ (r \ge 2)$.

記号　$H^+(X; R) = \sum_{i>0} H^i(X; R)$,

$$f^+ = f^* | H^+(Y; R) : H^+(Y; R) \longrightarrow H^+(X; R) \quad (f : X \to Y)$$

(4.1)　スペクトル系列 $\{E_r\}$ が自明 $\Longleftrightarrow E_2 = E_3 = \cdots = E_\infty$.

定理 4.2　B, F が0-連結, 局所係数環 $\underline{H^*(F; R)}$ が自明なファイバー空間 (E, p, B) の Serre スペクトル系列が自明であると仮定すれば,

(1)　$p^* : H^*(B; R) \to H^*(E; R)$ は単射,

(2)　$i^*: H^*(E; R) \to H^*(F; R)$ は全射で，イデアル $(\mathrm{Im}\, p^+) \subset \mathrm{Ker}\, i^*$.

さらに，$H^i(F; R)$ は各 i について有限生成 R 自由加群と仮定すれば，

(3)　$H^*(E; R)$ は $\mathrm{Im}\, p^*$-加群として自由でその基底 $\{e_\alpha\}$ としては，$\{i^*e_\alpha\}$ が $H^*(F; R)$ の R-加群としての斉次な基底となるものをとれ，

(4)　$\mathrm{Im}\, p^*$ は $H^*(E; R)$ の直和因子で，$H^*(F; R) \cong H^*(E; R)/(\mathrm{Im}\, p^+)$.

[証明]　(1)，(2) は (2.11) より直ちにえられる．補題 2.15 と (4.1) より，(3) の場合は $H^p(B; R) \otimes_R H^q(F; R) \cong E_\infty{}^{p,q}$ で，この同型は $E_\infty{}^{p,0} \cong H^p(B; R)$ と $E_\infty{}^{0,q} \cong H^q(F; R)$ の積で与えられ，かつ積 $D^{p,0} \otimes D^{0,q} \to D^{p,q}$ から誘導されている．ここで，(2.10.10) より $\mathrm{Im}\, p^* = E_\infty{}^{*,0} = D^{*,0}$. (2.10.9) より $i^*e_\alpha \in E_\infty{}^{0,p}$ は $e_\alpha \in D^{0,p} = H^p(E; R)$ の類とみなしてよい．このとき，$D^{p,*}/D^{p+1,*} \cong E_\infty{}^{p,*}$ は $\{i^*e_\alpha \in E_\infty{}^{0,p}\}$ を基底とする $\mathrm{Im}\, p^*$-自由加群であるから，p に関する帰納法で $D^{p,*}$ は $\{e_\alpha \in D^{i,0},\ i \leq p\}$ を基底とする $\mathrm{Im}\, p^*$-自由加群．よって (3) がえられる．e_α の最初の元は $H^0(E; R)$ の生成元 1 にとれることから (4) が出る．(終)

系 4.3　定理 4.2 において，$H^i(B; R)$，$H^j(F; R)$ が各 i, j について有限生成 R-自由加群ならば，各 k について $H^k(E; R)$ もそうで，Poincaré 多項式について，

$$P_R(E, t) = P_R(B, t) \cdot P_R(F, t)$$

定理 4.4　B が 0-連結であるファイバー空間 (E, p, B) において，$i^*: H^*(E; R) \to H^*(F_b; R)$ が全射であれば，その局所係数環 $\underline{H^*(F; R)}$ は自明である．さらに，補題 2.15 の仮定がみたされているときには，Serre スペクトル系列は自明であり定理 4.2 を適用できる．

[証明]　(2.10.9) より，i^* が全射であれば $E_\infty{}^{0,n} = E_{n+1}^{0,n} = \cdots = E_2{}^{0,n}$ かつ $i_0^*: H^0(B; \underline{H^q(F; R)}) \to H^0(b; H^q(F_b; R)) = H^q(F_b; R)$ は全射．この後半と補題 1.18 (3) より，局所係数環は自明である．前半の等号は，$d_r = 0: E_r{}^{0,n} \to E_r{}^{r,n-r+1}$ $(r \geq 2)$ と同値である．補題 2.15 が適用できる場合は，帰納的に $E_2{}^{p,q} = E_r{}^{p,q}$ を仮定すれば，$E_r{}^{p,0} \otimes E_r{}^{0,q} \cong E_r{}^{p,q}$ となる．明らかに $d_r = 0: E_r{}^{p,0} \to E_r{}^{p-r,1-r}$ $(r \geq 2)$. よって，$b \otimes f \in E_r{}^{p,q}$ について，$d_r(b \otimes f) = d_r b \otimes f + (-1)^p b \otimes d_r f = 0$. 従って，つねに $d_r = 0 \Longrightarrow E_{r+1}^{p,q} = E_r{}^{p,q} = E_2{}^{p,q}$. 帰納法により後半がえられる．　(終)

定義　$i^*: H^*(E; R) \to H^*(F_b; R)$ が全射のとき，ファイバー F_b は係数環

R に関して**全体的非 0-ホモローグ**といわれる.

定理 4.4 および定理 4.2 は **Leray-Hirsch の定理**といわれる.

R が体で E, F_b が有限型のときは,

$$i^*: \text{全射} \Longleftrightarrow i_*: H_*(F_b;\ R) \to H_*(E;\ R) \text{ は単射}.$$

これが全体的非 0-ホモローグということの本来の意味である.

補題 4.5　補題 2.15 の適用される Serre スペクトル系列は次の様な場合には自明である:

(1)　i が奇数のとき, $H^i(B;\ R) = H^i(F;\ R) = 0$,

(2)　R は体または $\boldsymbol{Z}$, $H^*(B;\ R)$, $H^*(F;\ R)$, $H^*(E;\ R)$ は各次元で有限生成 R-自由加群であり, $P_R(E,\ t) = P_R(B,\ t) \cdot P_R(F,\ t)$.

[証明]　(1) の場合, p または q が奇数 $\Longrightarrow E_2{}^{p,q} = 0 \Longrightarrow E_r{}^{p,q} = 0\ (r \geq 2)$. d_r: $E_r{}^{p,q} \to E_r{}^{p+r,q-r+1}$ において, p, q, $p+r$, $q-r+1$ のいずれかは奇数 $\Longrightarrow d_r = 0$

(2) の場合 $P_R(B,\ t) \cdot P_R(F,\ t) = \sum_{p,q} \operatorname{rank} E_2{}^{p,q} \cdot t^{p+q}$, $P_R(E,\ t) = \sum_n \operatorname{rank} H^n(E;\ R) \cdot t^n = \sum_{p,q} (\operatorname{rank} E_\infty{}^{p,q}) \cdot t^{p+q}$.　一般に $\operatorname{rank} E_r{}^{p,q} \geq \operatorname{rank} E_{r+1}^{p,q}$.　$d_r \neq 0: E_r{}^{p,q} \longrightarrow E_r{}^{p+r,q-r+1} \Longrightarrow \operatorname{rank} E_r{}^{p,q} > \operatorname{rank} E_{r+1}^{p,q}$ であるから $d_r = 0$ でなければならない.(終)

G/T^n (G:コンパクト連結古典群) のコホモロジー

第1章, §3 で定義した　$G = SO(2n)$, $SO(2n+1)$, $U(n)$, $Sp(n)$, $SU(n+1)$ の標準的極大トーラス T^n による等質空間 G/T^n と分類空間 BG, BT^n との関係を以下で調べよう.

定理 4.6　$G = U(n)$, $Sp(n)$, $SU(n+1)$ のとき, $H^*(G/T^n)$ は有限生成自由加群で, 乗法的に $H^2(G/T^n)$ で生成され, その Poincaré 多項式は

$$P(U(n)/T^n,\ t) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1-t^{2i}}{1-t^2}, \qquad P(SU(n+1)/T^n,\ t) = P(U(n+1)/T^{n+1},\ t)$$

$$P(Sp(n)/T^n,\ t) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1-t^{4i}}{1-t^2}$$

[証明]　ファイバーバンドル

$$U(n) \times T^1/T^{n+1} = U(n)/T^n \xrightarrow{\ i\ } U(n+1)/T^{n+1} \xrightarrow{\ p\ } U(n+1)/U(n) \times T^1$$

において, $U(n+1)/U(n) \times T^1$　は複素射影空間　$P_n(\boldsymbol{C}) = U(n+1)/U(1) \times U(n)$ と同相であるから, $P_n(\boldsymbol{C})$ と同一視する. (3.21) によって $H^*(P_n(\boldsymbol{C})) = \boldsymbol{Z}[t]/(t^{n+1})$, $t \in H^2(P_n(\boldsymbol{C}))$.　$U(1)/T^1 = 1$ 点 については定理は自明であるから, $U(n)$

$/T^n$ について定理を仮定すれば，補題 4.5 (1) が適用される．系 4.3 により

$$P(U(n+1)/T^n,\ t)=P(P_n(\boldsymbol{C}),\ t)\cdot P(U(n)/T^n,\ t)$$
$$=\frac{1-t^{2n+2}}{1-t^2}\prod_{i=1}^{n}\frac{1-t^{2i}}{1-t^2}=\prod_{i=1}^{n+1}\frac{1-t^{2i}}{1-t^2}$$

また，定理 4.2 (3) において，$i^*(e_\alpha)$ は $H^2(U(n)/T^n)$ の元の多項式で書けるから，e_α も $H^2(U(n+1)/T^{n+1})$ の元 $\{x_\beta\}$ の多項式で書けるものに選べる．よって，$H^*(U(n+1)/T^{n+1})$ は $\{p^*(t),\ x_\beta\}$ で乗法的に生成される．n に関する帰納法により，定理は $G=U(n)$ で正しい．

$T^n=SU(n+1)\cap T^{n+1}$ と $T^1\times 1\subset T^{n+1}$ を考える．$T^1\times 1$ と $SU(n+1)$ は $U(n+1)$ を生成するから，$SU(n+1)$ は $U(n+1)/T^{n+1}$ に作用し，その等方群は T^n である．よって，$SU(n+1)/T^n\cong U(n+1)/T^{n+1}$ (同相)．

$G=Sp(n)$ については，$Sp(n+1)/Sp(n)\times T^1\cong P_{2n+1}(\boldsymbol{C})$ (同相) をいえば，$G=U(n)$ の場合と同様である．射入 $\boldsymbol{c}'$: $Sp(n+1)\to U(2n+2)$ は写像 φ : $Sp(n+1)/1\times Sp(n)=V_{n+1,1}(\boldsymbol{H})\to U(2n+2)/1\times U(2n+1)=V_{2n+2,1}(\boldsymbol{C})$ を誘導するがこれらはそれぞれ $\boldsymbol{H}^{n+1}$ および $\boldsymbol{C}^{2n+2}$ の中の長さ 1 のベクトルの集合で，第 1 章，§ 2 の $\boldsymbol{c}'$: $\boldsymbol{H}^{n+1}\cong\boldsymbol{C}^{2n+2}$ で同一視すれば，$\varphi=1$．よって，φ は同相写像であり，$T^1=U(1)$ $(\subset Sp(1))$ の作用も対応しているから，$Sp(n+1)/Sp(n)\times T^1\cong Sp(n+1)/T^1\times Sp(n)\cong U(2n+2)/T^1\times U(2n+1)=P_{2n+1}(\boldsymbol{C})$．（終）

補題 4.7 $H^*(SO(2n+2)/SO(2n)\times T^1)$ は自由加群で $P(SO(2n+2)/SO(2n)\times T^1,\ t)=(1+t^{2n})(1-t^{2n+2})(1-t^2)^{-1}=(1+t^{2n})(1+t^2+t^4+\cdots+t^{2n})$．

［証明］ $V_{2n+2,2}(\boldsymbol{R})=SO(2n+2)/SO(2n)\times 1=O(2n+2)/O(2n)\times 1$ である．補題 3.12 において，$\chi=0$ であるから，Gysin 完全系列から容易に

(4.7)′ $H^*(V_{2n+2,2}(\boldsymbol{R}))\cong H^*(S^{2n}\times S^{2n+1})=\Lambda(x_{2n},\ x_{2n+1})$

$V=V_{2n+2,2}(\boldsymbol{R})$，$B=SO(2n+2)/SO(2n)\times T^1$ とおき，球バンドル $T^1\longrightarrow V\xrightarrow{p}B$ に関する Gysin 完全系列 $(t=\chi\in H^2(B))$

$$\cdots\longrightarrow H^{i+1}(V)\xrightarrow{\lambda}H^i(B)\xrightarrow{t\cdot}H^{i+2}(B)\xrightarrow{p^*}H^{i+2}(V)\xrightarrow{\lambda}\cdots$$

を考える．まず，$H^0(V)\cong\boldsymbol{Z}$, $H^i(V)=0$ $(i\neq 0,\ i<2n)\Longrightarrow H^{2j}(B)\cong\boldsymbol{Z}$, $H^{2j+1}(B)=0$ $(0\leq j\leq n-1)$. B は $4n$ 次元多様体 $\Longrightarrow H^i(B)=0$ $(i>4n)$ かつ $0\to H^{4n+1}(V)\to H^{4n}(B)\to 0$ は完全 $\Longrightarrow H^{4n}(B)\cong\boldsymbol{Z}$．次に，$H^i(V)=0$ $(2n+1<i<4n+1)\Longrightarrow$

$H^{2j}(B)\cong \boldsymbol{Z}$, $H^{2j-1}(B)=0$ $(n+1\leq j\leq 2n)$. 最後に，完全系列 $0\to H^{2n+1}(V)\to H^{2n}(B)\to H^{2n+2}(B)\to 0$ より $H^{2n}(B)\cong \boldsymbol{Z}\oplus\boldsymbol{Z}$. 従って補題は証明される．(終)

注意 4.8　$H^*(SO(2n+2)/SO(2n)\times T^1)=\boldsymbol{Z}[t,\ s]/(t^{n+1}-2s,\ s^2)$,

$$t\in H^2,\ s\in H^{2n}$$

定理 4.9　$H^*(SO(2n)/T^n)$, $H^*(SO(2n+1)/T^n)$ は有限生成自由加群で，それらの Poincaré 多項式は

$$P(SO(2n)/T^n,\ t)=\frac{1}{1+t^{2n}}\prod_{i=1}^{n}\frac{1-t^{4i}}{1-t^2},\quad P(SO(2n+1)/T^n,\ t)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1-t^{4i}}{1-t^2}$$

［証明］　$SO(2)/T^1=1$ 点 については自明．$SO(2n)/T^n$ について定理を仮定すれば，補題 4.7 によって，2つのファイバーバンドル

$$SO(2n)/T^n\longrightarrow SO(2n+1)/T^n\longrightarrow SO(2n+1)/SO(2n)=S^{2n}$$
$$SO(2n)/T^n\longrightarrow SO(2n+2)/T^{n+1}\longrightarrow SO(2n+2)/SO(2n)\times T^1$$

に補題 4.5 (1) が適用できる．系 4.3 により定理が帰納的にえられる．(終)

一般に，コンパクト連結 Lie 群 G とその極大トーラス T について，$H^*(G/T)$ は自由加群で $H^{\mathrm{odd}}(G/T)=0$ が知られている (第6章, 定理 4.21)．定理 4.6, 定理 4.9 はそれを具体的に示したものである．

記号　$\boldsymbol{Z}_2{}^n=O(n)\cap D(n,\ \boldsymbol{R})=\{\varepsilon_1\oplus\cdots\oplus\varepsilon_n\,|\,\varepsilon_i=\pm 1\}\subset O(n)$

$S\boldsymbol{Z}_2{}^n=SO(n)\cap \boldsymbol{Z}_2{}^n\subset SO(n)$

明らかに，

$$\boldsymbol{Z}_2{}^n=\boldsymbol{Z}_2\times\cdots\times\boldsymbol{Z}_2=O(1)\times\cdots\times O(1)\ (n\text{ 個}),\qquad S\boldsymbol{Z}_2{}^n\cong\boldsymbol{Z}_2{}^{n-1}\ (\text{同型})$$

$i_j:\boldsymbol{Z}_2\to\boldsymbol{Z}_2{}^n$ を j 番目の因子への射入とし，これにより $\boldsymbol{Z}_2\subset\boldsymbol{Z}_2{}^n$ と考えたとき，(3.16) $(G=\boldsymbol{Z}_2{}^n,\ H=\boldsymbol{Z}_2)$ のバンドルの射影を

$$\rho_j: B\boldsymbol{Z}_2\longrightarrow B\boldsymbol{Z}_2{}^n\quad (j=1,\ \cdots,\ n)$$

とする．補題 3.18 および Künneth の公式より，

(4.10)　標数2の体 $\boldsymbol{k}$ について，$H^*(B\boldsymbol{Z}_2{}^n;\ \boldsymbol{k})=\boldsymbol{k}[x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n]$, $x_i\in H^1$. ここで，x_i は $\rho_j{}^*(x_i)=\delta_{ij}x$, $\rho_j{}^*: H^1(B\boldsymbol{Z}_2{}^n;\ \boldsymbol{k})\to H^1(B\boldsymbol{Z}_2;\ \boldsymbol{k})=\boldsymbol{k}[x]$, で定まる．

定理 4.11　$SO(n)/S\boldsymbol{Z}_2{}^n\cong O(n)/\boldsymbol{Z}_2{}^n$ (同相)．$\boldsymbol{k}$ を標数2の体とするとき，$H^*(O(n)/\boldsymbol{Z}_2{}^n;\ \boldsymbol{k})$ は乗法的に $H^1(O(n)/\boldsymbol{Z}_2{}^n;\ \boldsymbol{k})$ で生成され，その Poincaré 多項式は

$$P_k(O(n)/\boldsymbol{Z}_2{}^n,\ t)=P_k(SO(n)/S\boldsymbol{Z}_2{}^n,\ t)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1-t^i}{1-t}$$

［証明］ $O(n)/\boldsymbol{Z}_2{}^n$ について定理を帰納的に仮定する．ファイバーバンドル

$$O(n)/\boldsymbol{Z}_2{}^n\xrightarrow{i}O(n+1)/\boldsymbol{Z}_2{}^{n+1}\xrightarrow{p}O(n+1)/O(n)\times\boldsymbol{Z}_2\cong P_n(\boldsymbol{R})$$

に定理 4.4 を適用するためには，

$$i^*: H^j(O(n+1)/\boldsymbol{Z}_2{}^{n+1};\ \boldsymbol{k})\longrightarrow H^j(O(n)/\boldsymbol{Z}_2{}^n;\ \boldsymbol{k})$$

が全射をいえばよい． $H^*(O(n)/\boldsymbol{Z}_2{}^n;\ \boldsymbol{k})$ は $H^1(O(n)/\boldsymbol{Z}_2{}^n;\ \boldsymbol{k})$ で生成されるから，i^* が $j=1$ のとき全射をいえばよい．定理 2.14 の完全系列

$$H^1(P_n(\boldsymbol{R});\ \boldsymbol{k})\xrightarrow{p^*}H^1(O(n+1)/\boldsymbol{Z}_2{}^{n+1};\ \boldsymbol{k})\xrightarrow{i^*}H^1(O(n)/\boldsymbol{Z}_2{}^n;\ \boldsymbol{k})$$

を考えると，第 1 項および第 3 項の $\boldsymbol{k}$ 上の次元は 1 および $n-1$ であるから，第 2 項の $\boldsymbol{k}$ 上の次元が n 以上であることをいえばよい．これは完全系列

$$0\longrightarrow H^1(BO(n+1);\ \boldsymbol{k})\longrightarrow H^1(B\boldsymbol{Z}_2{}^{n+1};\ \boldsymbol{k})\longrightarrow H^1(O(n+1)/\boldsymbol{Z}_2{}^{n+1};\ \boldsymbol{k})$$

に定理 3.19 (1) および (4.10) を適用して，$\boldsymbol{k}$ 上の次元を比べてわかる．従って，定理 4.4 によって，最初のファイバーバンドルに定理 4.2 が適用できるから，定理 4.6 の証明と同様に定理の結果がえられる．　　（終）

Weyl 群の作用

G は Lie 群，T は G の可換な閉部分群とする．

記号　$W(G:T)=N_G(T)/T$．ただし，$N_G(T)=\{g\in G\,|\,gT=Tg\}$

$W(G:T)$ の T への作用を，$n\in N_G(T)$ の類 $\varphi=\{n\}=nT=Tn\in W(G:T)$ について

$$\varphi\cdot t=n^{-1}tn\quad(t\in T)$$

で定義する．T が可換であるから，この定義は φ の代表元 $n\cdot t'$, $t'\in T$, のとり方に無関係に定まる．

一方，普遍 G-バンドル $(EG,\ p,\ BG,\ G)$ において，$BG=EG/G$ であるから，$BT=EG/T$ とおけば $(EG,\ p,\ BT,\ T)$ は普遍 T-バンドル．BT への $W(G:T)$ の作用 $W(G:T)\times BT\to BT$ を，上の $\varphi=\{n\}$ と $eT\in BT$ $(e\in EG)$ に対して，

$$\varphi\cdot eT=enT\quad(=eTn)$$

で定義する．この定義が n のとり方によらぬことは明らか．

$W(G:T)$ のこれらの作用は $H^*(T)$, $H^*(BT)$ への作用をひきおこす．

記号　$H^*(BT;\ R)^{W(G:T)}=$($W(G:T)$ の作用で不変な元の作る部分環)

(3.16)のファイバーバンドル($H=T$)の射影 $\rho=\rho(T,G)$ で誘導される準同型

$$\rho^*:H^*(BG;\ R)\longrightarrow H^*(BT;\ R)$$

を考える.

補題 4.12　$\varphi\in W(G:T)\Longrightarrow\rho\circ(\varphi\cdot)=\rho,\ \mathrm{Im}\,\rho^*\subset H^*(BT;\ R)^{W(G:T)}$

［証明］　$\rho(eT)=eG\Longrightarrow\rho(\varphi\cdot eT)=\rho(enT)=enG=eG=\rho(eT)\Longrightarrow\rho\circ(\varphi\cdot)=\rho\Longrightarrow(\varphi\cdot)^*\rho^*(x)=\rho^*(x),\ x\in H^*(BG;\ R)\Longrightarrow\rho^*(x)\in H^*(BT;\ R)^{W(G:T)}$　(終)

普遍 G-バンドル $G\to EG\to BG$ において，G は 0-連結とする．EG:∞-連結 $\Longrightarrow H^*(EG;\ R)\cong R$ であるから，定理 2.14 により，

(4.13)　$H^1(BG;\ R)=0$,

転入 $\tau_{\bar b}:H^1(G_{\bar b};\ R)\cong H^2(BG;\ R)$ (同型対応),　　$\bar b\in BG$

G を 0-連結な T でおきかえても(4.13)は成り立ち，そのとき，転入

$$\tau_b:H^1(T_b;\ R)\underset{\cong}{\xrightarrow{\delta^*}}H^2(EG,\ T_b;\ R)\underset{\cong}{\xleftarrow{p^*}}H^2(BT,\ b;\ R)\underset{\cong}{\xrightarrow{j^*}}H^2(BT;\ R)$$

は $b\in BT$ に依存している．$b\in\rho^{-1}(\bar b)(=(G/T)_b)$ にとることとし，$e\in T_b$ につき，

$$\lambda_e:T\longrightarrow T_b\Longleftrightarrow\lambda_e(t)=e\cdot t,\ \ t\in T$$

で同相 λ_e を定義し，

(4.13)′　$\tau=\tau_b\circ\lambda_e{}^{*-1}:H^1(T;\ R)\cong H^2(BT;\ R),\ \ b=p(e)$

とおく.

補題 4.14　G, T はともに 0-連結とする(T は可換な G の閉部分群)．そのとき(4.13)′の τ は $e\in G_{\bar b}$ のとり方に無関係に定まり，$W(G:T)$ の作用はこの τ と可換である.

［証明］　$e'\in G_{\bar b}=e\cdot G$ につき，$\tau'=\tau_{b'}\circ\lambda_{e'}{}^{*-1}$, $b'=p(e')$を考える．$(G/T)_b\cong G/T$ は連結な多様体であるから，b と b' を結ぶ道 $\varpi:I\to(G/T)_b\subset BT$ でその像 $\overline{W}=\varpi(I)$ が可縮なものがとれる．被覆ホモトピー性質によって，e と $T_{b'}$ の点 e_1' を結ぶ道 $w':I\to G_{\bar b}$ で $p\circ w'=\varpi$ となるものがある．ここで，$e_1'=e'\cdot t,\ t\in T$, とかける．e と t を結ぶ道 $l:I\to T$ を考え $w(\theta)=w'(\theta)\cdot l(\theta)$ とおけば，$w:I\to G_{\bar b}$ は e と e' を結ぶ道で，$p\circ w=\varpi$ をみたすから，その像 $W=w(I)$ は $\overline{W}$ と同相 $\Longrightarrow W$ は可縮．$\overline{T}=p^{-1}\overline{W}$ とおけば，T の作用により $W\times I$ と $\overline{T}$ は同相で，T_b および $T_{b'}$ は $\overline{T}$ の変位レトラクトとなり，$\lambda_e\simeq\lambda_{e'}:T\to\overline{T}$.

以上のことから，次の図式は可換かつ各対応は同型であり，$\tau=\tau'$ が示される．

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & \overset{\lambda_e{}^*}{\swarrow} & H^1(T_b;R) & \xrightarrow{\delta^*} & H^2(EG,\ T_b;R) & \xleftarrow{p^*} & H^2(BT,b;R) & \overset{j^*}{\searrow} & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
H^1(T;\ R) & & H^1(\overline{T};R) & \xrightarrow{\delta^*} & H^2(EG,\overline{T};R) & \xleftarrow{p^*} & H^2(BT,\overline{W};R) & & H^2(BT;R) \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & \underset{\lambda_{e'}{}^*}{\nwarrow} & H^1(T_{b'};R) & \xrightarrow{\delta^*} & H^2(EG,\ T_{b'};R) & \xleftarrow{p^*} & H^2(BT,b';R) & \underset{j^*}{\nearrow} &
\end{array}$$

次に，$\varphi=\{n\}\in W(G:T)$，$n\in N_G(T)$，$\varphi(b)=b'$，$e\in T_b$，$e'=e\cdot n\in T_{b'}$ とする．$f:EG\to EG\Longleftrightarrow f(x)=x\cdot n$ と定義するとき，φ の T への作用について $\lambda_{e'}(\varphi\cdot t)=e'\cdot n^{-1}tn=e\cdot tn=\lambda_e(t)\cdot n=f(\lambda_e(t))$，$\varphi$ の BT への作用について $\varphi\cdot p(x)=\varphi\cdot xT=xTn=x\cdot nT=p(x\cdot n)=p(f(x))$．よって，図式

$$\begin{array}{ccccccccc}
H^1(T;R) & \xleftarrow{\lambda_{e'}{}^*} & H^1(T_{b'};R) & \xrightarrow{\delta^*} & H^2(EG,\ T_{b'};R) & \xleftarrow{p^*} & H^2(BT,b';R) & \overset{j^*}{\searrow} & \\
\downarrow{\scriptstyle\varphi^*} & & \downarrow{\scriptstyle f^*} & & \downarrow{\scriptstyle f^*} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi^*} & & H^1(T;R) \\
H^1(T;R) & \xleftarrow{\lambda_e{}^*} & H^1(T_b;R) & \xrightarrow{\delta^*} & H^2(EG,\ T_b;R) & \xleftarrow{p^*} & H^2(BT,b;R) & \underset{j^*}{\nearrow} &
\end{array}$$

は可換である．これは φ の作用が τ と可換，$\tau\circ\varphi^*=\varphi^*\circ\tau$，を示している．(終)

第 1 章，§3 で考察した Weyl 群は次のものである：

$W(G)=W(G:T^n)=N_G(T^n)/T^n$,

$G=U(n)$，$SU(n+1)$，$Sp(n)$，$SO(2n)$，$SO(2n+1)$

$H^*(T^1)=H^*(U(1))=H^*(S^1)=\Lambda(x)$，$x\in H^1$，に Künneth の公式(1.10)を使って，

(4.15)　$H^*(T^n)=\Lambda(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$．ここで，$x_i\in H^1(T^n)$ は次の条件で定まる：j 番目の因子への射入 $i_j:T^1\to T^n=T\times\cdots\times T$ について $i_j{}^*(x_i)=\delta_{ij}x$．$H^1(T^n)$ は基底 $\{x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n\}$ をもつ．

補題 4.16　(1)　$W(U(n))$ の $H^1(T^n)$ への作用全体は基底 $\{x_1, x_2,\ \cdots,\ x_n\}$ の置換全体と一致する．

(2)　$W(Sp(n))$ の $H^1(T^n)$ への作用全体は基底 $\{x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n\}$ の任意個のものの符号を変えたのち置換を行ったもの全体と一致する．

(3)　$W(SO(2n+1))$ の $H^1(T^n)$ への作用は $W(Sp(n))$ の作用と同じ．

(4)　$W(SO(2n))$ の $H^1(T^n)$ への作用全体は基底 $\{x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n\}$ の偶数個のものの符号を変えたのち置換を行ったもの全体と一致する．

［証明］　第1章，定理3.13の $W(G)$ の作用のうち，λ_i の置換は x_i の置換に対応することは，(4.15)を使って確かめることができる．また，対応 $\lambda\to\lambda^{-1}$ によって，$T=U(1)=S^1$ はそれ自身へ逆向きに写されるから，$H^1(T)$ では x は $-x$ に写される．従って，　対応 $\lambda_i\to\lambda_i{}^{-1}$ により，x_i は $-x_i$ に写される．これらのことから，補題がえられる．　　(終)

系 4.17　$SU(n+1)$ の中の T^n は $T^n=\{t_1\oplus\cdots\oplus t_{n+1}\in T^{n+1}\subset U(n+1)\,|\,t_1\cdots t_{n+1}=1\}$ で与えられる．従って，射入 $i:T^n\to T^{n+1}$ は同型 $H^*(T^n)\cong\Lambda(x_1,\cdots,x_{n+1})/(\sum x_i)$ を誘導し，$H^1(T^n)$ は生成元 $\{x_1,\cdots,x_{n+1}\}$ と関係式 $x_1+\cdots+x_{n+1}=0$ で与えられる．この生成元を使えば，$W(SU(n+1))$ の作用は $\{x_1,\cdots,x_{n+1}\}$ の置換をひきおこす．

記号　$W_2(O(n))=W(O(n):\boldsymbol{Z}_2{}^n)$，$W_2(SO(n))=W(SO(n):S\boldsymbol{Z}_2{}^n)$

補題 4.18　(1)　$W_2(O(n))$ は n 次の対称群と同型で，その各元は置換行列 $P_\sigma=(\delta_{i\sigma(j)})$ で代表される．

(2)　$\boldsymbol{k}$ を標数2の体とするとき，$W_2(O(n))$ の $H^*(B\boldsymbol{Z}_2{}^n;\boldsymbol{k})=\boldsymbol{k}[x_1,\cdots,x_n]$ への作用は $\{x_1,\cdots,x_n\}$ の置換である．

［証明］　(1)　$A=(a_{ij})\in N_{O(n)}(\boldsymbol{Z}_2{}^n)\subset O(n)$ を考える．各 i について，$a_{ij}\neq 0$ となる最小の j を $\sigma(i)$ とする．$D=I_{\sigma(i)}\oplus(-I_{n-\sigma(i)})$ に対して $D'=\varepsilon_1\oplus\cdots\oplus\varepsilon_n$ が存在して，$AD=D'A\Longrightarrow a_{i\sigma(i)}=\varepsilon_i a_{i\sigma(i)}\neq 0$，かつ $a_{ij}=-\varepsilon_i a_{ij}$ $(j>\sigma(i))\Longrightarrow a_{ij}=0$ $(j\neq\sigma(i))\Longrightarrow A=P_\sigma D_0$ となる $D_0\in O(n)\cap D(n,R)=\boldsymbol{Z}_2{}^n$ がある．$P_\sigma\in N_{O(n)}(\boldsymbol{Z}_2{}^n)$ は明らかであるから，(1)がえられる．

(2)　次の図式は可換で，δ^*, j^* は同型対応である（係数体 $\boldsymbol{k}$ は省略する）：

$$\begin{array}{ccccccc}
H^0((\boldsymbol{Z}_2{}^n)_b,e_b) & \xrightarrow{\delta^*} & H^1(EO(n),(\boldsymbol{Z}_2{}^n)_b) & \xleftarrow{p^*} & H^1(B\boldsymbol{Z}_2{}^n,b) & \xrightarrow{j^*} & H^1(B\boldsymbol{Z}_2{}^n)\\
\downarrow{\scriptstyle i_j^*} & & \downarrow{\scriptstyle 1^*} & & \downarrow{\scriptstyle \rho_j^*} & & \downarrow{\scriptstyle \rho_j^*}\\
\boldsymbol{k}\cong H^0((\boldsymbol{Z}_2)_a,e_a) & \xrightarrow{\delta^*} & H^1(EO(n),(\boldsymbol{Z}_2)_a) & \xleftarrow{p^*} & H^1(B\boldsymbol{Z}_2,a) & \xrightarrow{j^*} & H^1(B\boldsymbol{Z}_2)\cong\boldsymbol{k}
\end{array}$$

ここで，(4.10)における記号 i_j, ρ_j を用いている．下段の p^* が同型であることは直接確かめることができる（上段の p^* は同型ではない）．$\Sigma=\delta^{*-1}\circ p^*\circ j^{*-1}$（懸垂）とおいて右の可換な図式がえられる．補題4.14の証明の

$$\begin{array}{ccc}
H^0((\boldsymbol{Z}_2{}^n)_b,e_b;\boldsymbol{k}) & \xleftarrow{\Sigma} & H^1(B\boldsymbol{Z}_2{}^n;\boldsymbol{k})\\
\downarrow{\scriptstyle i_j^*} & & \downarrow{\scriptstyle \rho_j^*}\\
\boldsymbol{k}\cong H^0((\boldsymbol{Z}_2)_a,e_a;\boldsymbol{k}) & \underset{\cong}{\xleftarrow{\Sigma}} & H^1(B\boldsymbol{Z}_2;\boldsymbol{k})
\end{array}$$

後半に従って $W_2(O(n))$ の元 $\varphi_\sigma=\{P_\sigma\}$ の作用を考えることによって，$f=f_\sigma$：$(\boldsymbol{Z}_2{}^n)_b\to(\boldsymbol{Z}_2{}^n)_{\varphi(b)}$ があって，$H^1(B\boldsymbol{Z}_2{}^n;\boldsymbol{k})$ 上で $f_\sigma{}^*\circ\sum=\sum\circ\varphi_\sigma{}^*$ かつ $f_\sigma\circ i_j=i_{\sigma(j)}\circ g_\sigma$，$g_\sigma=f_\sigma|(\boldsymbol{Z}_2)_a:(\boldsymbol{Z}_2)_a\to(\boldsymbol{Z}_2)_{a'}$ $(\rho_{\sigma(j)}(a')=\varphi(b))$．ここで，$g_\sigma$ は同相で，$\boldsymbol{k}$ の標数は 2 であるから $g_\sigma{}^*$ は $H^0(\ ,\ ;\boldsymbol{k})\cong\boldsymbol{k}$ の生成元 1 の間の対応を与えていることに注意する．(4.10) により $H^1(B\boldsymbol{Z}_2{}^n;\boldsymbol{k})$ の生成元は $\sum\rho_j{}^*x_k=\sum\delta_{jk}x=\delta_{jk}\in\boldsymbol{k}$ をみたす．以上のことから，

$$\begin{aligned}\sum\rho_j{}^*\varphi_\sigma{}^*(x_k)&=i_j{}^*\sum\varphi_\sigma{}^*(x_k)=i_j{}^*f_\sigma{}^*\sum x_k=g_\sigma{}^*i_{\sigma(j)}{}^*\sum x_k=g_\sigma{}^*\sum\rho_{\sigma(j)}{}^*x_k\\&=g_\sigma{}^*\delta_{\sigma(j)k}x=\delta_{\sigma(j)k}\end{aligned}$$

これは $\varphi_\sigma{}^*(x_k)=x_{\sigma^{-1}(k)}$ を示している．結局 $W_2(O(n))$ の作用は $\{t_1,\cdots,t_n\}$ の置換であることがわかる．　(終)

系 4.19　$W_2(SO(n))$ は $W_2(O(n))$ と同型で，その各元は $P_\sigma(I_{n-1}\oplus\mathrm{Sign}\,\sigma)$ で代表され，$H^*(BS\boldsymbol{Z}_2{}^n;\boldsymbol{k})=\boldsymbol{k}[x_1,\cdots,x_n]/(x_1+\cdots+x_n)$ への作用は $\{x_1,\cdots,x_n\}$ の置換である．

§5　特性類とその間の関係

特性類

定義　同じ構造群 G とファイバー F をもち底空間 B は CW- 複体であるような，各ファイバーバンドル $\xi=(E,p,B,F,G)$ に B のコホモロジー環の元

$$\alpha(\xi)\in H^*(B;R)\qquad(\text{係数環 }R\text{ は一定})$$

を対応させ，バンドル写像 $f:\xi'=(E',p',B',F,G)\to\xi$ に関する自然性

$$\bar{f}^*(\alpha(\xi))=\alpha(\xi')\quad(\bar{f}^*:H^*(B;R)\longrightarrow H^*(B';R))$$

をみたす $\alpha=\{\alpha(\xi)\}$ を (F,G) に関するファイバーバンドルの**特性類**という．

明らかに，特性類は次の性質で定義してもよい：

(5.1)　(1)　$\xi\equiv\xi'\Longrightarrow\alpha(\xi)=\alpha(\xi')$,

(2)　$\xi=(E,p,B,F,G)$ と $g:B'\longrightarrow B$ に対して，$g^*(\alpha(\xi))=\alpha(g^\#\xi)$.

$\alpha(\xi)\neq\alpha(\xi')$ となる特性類があれば ξ と ξ' は同値ではない．この性質はファイバーバンドルの構造の研究に有用である．

定理 5.2　G は F に効果的に作用し，CW- 複体である分類空間 BG が存在するときは，(F,G) に関するファイバーバンドルの特性類と $H^*(BG;R)$ の元

とは1対1対応にある.

［証明］ 普遍ファイバーバンドル $\gamma=(EG\times_G F,\ p,\ BG,\ F,\ G)$ を考え，特性類 $\alpha=\{\alpha(\xi)\}$ に $\alpha(\gamma)\in H^*(BG;\ R)$ を対応させる．逆に $x\in H^*(BG;\ R)$ が与えられたときには，分類定理(第2章，定理6.10)によって，各 ξ に対して $\xi\equiv g^\#\gamma$ となる $g:B\to BG$ をえらんで，$\alpha_x(\xi)=g^*(x)$ とおく．$g^\#\gamma\equiv g'^\#\gamma\Longrightarrow g\simeq g'\Longrightarrow g^*(x)=g'^*(x)$ であるから，対応 $x\to\alpha_x(\xi)$ が定まる．バンドル写像 $f:\xi'\to\xi$ について $\bar{f}:B'\to B$ を考えると，$\xi'\equiv\bar{f}^\#\xi\equiv\bar{f}^\#g^\#\gamma=(g\circ\bar{f})^\#\gamma$ であるから，$\alpha_x(\xi')=(g\circ\bar{f})^*(x)=\bar{f}^*(g^*(x))=\bar{f}^*(\alpha_x(\xi))$．よって $\alpha_x=\{\alpha_x(\xi)\}$ は特性類である．

$g=1_{BG}$ を考えれば $\alpha_x(\gamma)=x$ である．逆に，特性類 α について $x=\alpha(\gamma)$ とおくとき，上の $g:B\to BG$，$\xi\equiv g^\#\gamma$，について，(5.1) (2) より $\alpha(\xi)=g^*\alpha(\gamma)=g^*(x)=\alpha_x(\xi)$．よって，$\alpha=\alpha_x$．これらは対応 $x\to\alpha_x$ が1対1対応であることを示している． (終)

系 5.3 定理5.2の条件の下で，ファイバーバンドルとその同伴 G-バンドルは同じ特性類をもつ.

以後，G が古典群の場合を考える．$H^*(BG;R)$ に Chern 類，Stiefel-Whitney 類，Pontrjagin 類，Euler 類，symplectic Pontrjagin 類，等の元が定義されるが，それらの元に対応するファイバーバンドルの特性類は同じ名称でよばれる.

Chern 類，symplectic Pontrjagin 類

(3.16) で $G=U(n)$，$H=T^n$ とおいて，ファイバーバンドル

$$U(n)/T^n\xrightarrow{\ i\ }BT^n\xrightarrow{\ \rho\ }BU(n)$$

を考える.

ここで，BT^n のコホモロジー環は次のように求められる．(第2章，(6.20) により $BG\times BG'=B(G\times G')$ と考えられるから，以下，これを断わりなしに使うことにする.)

$H^*(BT^1)=H^*(BU(1))=\boldsymbol{Z}[t]$，$t\in H^2$，である(定理3.17)から，Künneth の定理によって，$H^*(BT^n)\cong H^*(BT^1\times\cdots\times BT^1)\cong H^*(BT^1)\otimes\cdots\otimes H^*(BT^1)\cong\boldsymbol{Z}[t_1,\ \cdots,\ t_n]$，$t_i\in H^2$．一方，(4.13)′ により，$\tau:H^1(T^n)\cong H^2(BT^n)$．故に，

(5.4)　$H^*(BT^n)=\boldsymbol{Z}[t_1, \cdots, t_n]$，ただし，(4.15)の生成元 $x_i \in H^1(T^n)$ について，$\tau(x_i)=t_i$ $(i=1, \cdots, n)$ とする．

定理 5.5　(1)　$\rho^*: H^*(BU(n)) \longrightarrow H^*(BT^n)=\boldsymbol{Z}[t_1, \cdots, t_n]$ は単射で，
$\mathrm{Im}\,\rho^*=H^*(BT^n)^{W(U(n))}=\boldsymbol{Z}[\sigma_1, \cdots, \sigma_n]$，$\sigma_i=\sigma_i(t_1, \cdots, t_n)$：$i$ 次基本対称式

(2)　$\rho^*(\sum_i c_i)=\prod_{j=1}^{n}(1+t_j)$ をみたす $c_i \in H^{2i}(BU(n))$ が一意的に存在して，

$$H^*(BU(n))=\boldsymbol{Z}[c_1, c_2, \cdots, c_n]$$

(3)　$i^*: H^*(BT^n) \to H^*(U(n)/T^n)$ は全射で，次の同型をひきおこす：

$$H^*(U(n)/T^n) \cong H^*(BT^n)/(\mathrm{Im}\,\rho^+)=\boldsymbol{Z}[t_1, \cdots, t_n]/(\sigma_1, \cdots, \sigma_n)$$

［証明］　定理 4.6, (5.4)，定理 3.17 により，$U(n)/T^n$，BT^n，$BU(n)$ のコホモロジーは自由加群で奇数次数の元はない．また, $U(n)$ は連結であるから局所係数環は自明である．よって，補題 4.5 (1) により，定理 4.2 が適用され，この定理の証明には，$\mathrm{Im}\,\rho^*=H^*(BT^n)^{W(U(n))}$ の部分を示せば十分であることがわかる．補題 4.12 により，$\mathrm{Im}\,\rho^* \subset H^*(BT^n)^{W(U(n))}$．補題 4.14，補題 4.16 によって，$W(U(n))$ の $H^*(BT^n)$ への作用は $t_1, \cdots, t_n$ の置換で与えられる．よって，$H^*(BT^n)^{W(U(n))}$ は $t_1, \cdots, t_n$ の対称式全体であるが，よく知られているように対称式は基本対称式 σ_i の多項式として一意的に書ける．即ち，$\mathrm{Im}\,\rho^* \subset \boldsymbol{Z}[\sigma_1, \cdots, \sigma_n]$．一方，定理 3.17 より，$H^*(BU(n))=\boldsymbol{Z}[c_1, \cdots, c_n]$．また, 定理 4.2 より, p^* は直和因子の上への単射である．これらより $\mathrm{Im}\,\rho^*=\boldsymbol{Z}[\sigma_1, \cdots, \sigma_n]$ をうる．　(終)

$(G, H)=(Sp(n), T^n)$ に対して，(3.16) のファイバーバンドル

$$Sp(n)/T^n \xrightarrow{i} BT^n \xrightarrow{\rho} BSp(n)$$

を考える．

定理 5.6　(1)　$\rho^*: H^*(BSp(n)) \longrightarrow H^*(BT^n)$ は単射で

$$\mathrm{Im}\,\rho^*=\boldsymbol{Z}[\bar{\sigma}_1, \cdots, \bar{\sigma}_n]=H^*(BT^n)^{W(Sp(n))},\quad \bar{\sigma}_i=\sigma_i(t_1^2, \cdots, t_n^2)$$

(2)　$\rho^*(\sum q_i)=\prod(1+t_j^2)$ をみたす $q_i \in H^{4i}(BSp(n))$ が一意的に存在して，

$$H^*(BSp(n))=\boldsymbol{Z}[q_1, \cdots, q_n]$$

(3)　$i^*: H^*(BT^n) \longrightarrow H^*(Sp(n)/T^n)$ は全射で，次の同型を誘導する：

$$H^*(Sp(n)/T^n) \cong \boldsymbol{Z}[t_1, \cdots, t_n]/(\bar{\sigma}_1, \cdots, \bar{\sigma}_n)$$

［証明］　$W(Sp(n))$ の $H^*(BT^n)$ への作用は符号の変更と置換であるから，

それで不変なものは，t_1^2, …, t_n^2 の対称式である．他は定理 5.5 と同様．(終)

定義 定理 5.5 の c_i を $\boldsymbol{i}$ **次 Chern 類**という．定理 5.6 の q_i を $\boldsymbol{i}$ **次 symplectic Pontrjagin 類**という．

この定義は $H^1(T^1)$ の生成元 x のとり方に依存している．x を $-x$ にとりかえれば，c_i, q_i は $(-1)^i c_i$, $(-1)^i q_i$ に変わるが，本質的な差異はない．

$SU(n+1)$ の T^n については，系 4.17 の $i: T^n \subset T^{n+1} \subset U(n+1)$ を用いて，$BT^n \to BT^{n+1}$ で誘導される全射 $H^*(BT^{n+1}) \to H^*(BT^n)$ による t_i の像を同じ記号で書けば，$H^*(BT^n) = \boldsymbol{Z}[t_1, \cdots, t_{n+1}]/(\sigma_1)$, $\sigma_1 = t_1 + \cdots + t_{n+1}$, である．

系 5.7 $U(n+1)/T^{n+1} = SU(n+1)/T^n \xrightarrow{i} BT^n \xrightarrow{\rho} BSU(n+1)$ について，定理 5.5 と同様の結果をうる．射影 $p: BSU(n+1) \to BU(n+1)$ の誘導する p^* は同型 $\boldsymbol{Z}[c_1, c_2, \cdots, c_{n+1}]/(c_1) = \boldsymbol{Z}[c_2, \cdots, c_{n+1}] \cong H^*(BSU(n+1))$ を与える．$c_i = p^*(c_i) \in H^{2i}(BSU(n+1))$ とおくと，上の同型は等号に変わり，$\rho^* \sum c_i \equiv \prod (1+t_j) \bmod \sigma_1$.

射入 $\boldsymbol{q}: U(n) \subset Sp(n)$ および $\boldsymbol{c}': Sp(n) \subset SU(2n) \subset U(2n)$ より，射影

$$\rho_q : BU(n) \longrightarrow BSp(n), \qquad \rho_{c'} : BSp(n) \longrightarrow BU(2n)$$

をうる．また，$\oplus: U(m) \times U(n) \subset U(m+n)$, $Sp(m) \times Sp(n) \subset Sp(m+n)$ は

$$\rho_{m,n} : BU(m) \times BU(n) \longrightarrow BU(m+n), \quad BSp(m) \times BSp(n) \longrightarrow BSp(m+n)$$

を与える．これらについて次の定理が成り立つ．

定理 5.8 (1) $\rho_q^*(q_i) = \sum_{j+k=2i} (-1)^{i+j} c_j c_k$, $\rho_q^* : H^*(BSp(n)) \longrightarrow H^*(BU(n))$

(2) $\rho_{c'}^*(c_{2j-1}) = 0$, $\rho_{c'}^*(c_{2j}) = (-1)^j q_j$, $\rho_{c'}^* : H^*(BU(2n)) \longrightarrow H^*(BSp(n))$

(3) $\rho_{m,n}^*(c_i) = \sum_{j+k=i} c_j \times c_k$, $\quad \rho_{m,n}^*(q_i) = \sum_{j+k=i} q_j \times q_k$

［証明］ (1) $U(n)$, $Sp(n)$ は T^n を共有するから，定理 5.5, 定理5.6 の単射 ρ^* をそれぞれ ρ_1^*, ρ_2^* と区別して，$\rho_1^* \circ \rho_q^* = \rho_2^*$. $\rho_1^*(\rho_q^* \sum (-1)^i q_i) = \rho_2^* \sum (-1)^i q_i = \prod (1-t_j^2) = \prod (1-t_j)(1+t_j) = \rho_1^*(\sum (-1)^i c_i) \rho_1^* (\sum c_i) = \rho_1^*((\sum (-1)^i c_i)(\sum c_i))$. ρ_1^* : 単射であるから $\rho_q^* \sum (-1)^i q_i = (\sum (-1)^i c_i)(\sum c_i) = \sum_i \sum_{j+k=i} (-1)^j c_j c_k$ $\Longrightarrow \rho_q^*(q_i) = (-1)^i \sum_{j+k=2i} (-1)^j c_j c_k$.

(2) $A \in T^n \Longrightarrow \boldsymbol{c}'(A) = A \oplus \overline{A} \in T^{2n}$ より，右の射影の可換図式において，$\rho^*(t_i) = \rho^*(-t_{n+i}) = t_i$ $(i=1, \cdots, n)$ がわかる．故

$$\begin{array}{ccc} BT^n & \xrightarrow{\rho} & BT^{2n} \\ \downarrow{\scriptstyle \rho_1} & & \downarrow{\scriptstyle \rho_2} \\ BSp(n) & \xrightarrow{\rho_{c'}} & BU(2n) \end{array}$$

に，　$\rho_1{}^*\rho_{c'}{}^*\sum c_i=\rho^*\rho_2{}^*\sum c_i=\rho^*\prod(1+t_j)=\prod(1+t_i)(1-t_i)=\prod(1-t_i{}^2)=\rho_1{}^*\sum(-1)^i q_i \Longrightarrow \rho_{c'}{}^*\sum c_i=\sum(-1)^i q_i$. 同じ次数の部分を比べて(2)がえられる.

(3)　ρ^* を用いて，$H^*(BT^m\times BT^n)\cong H^*(BT^{m+n})=\boldsymbol{Z}[t_1,\ \cdots,\ t_{m+n}]$ で考えれば，c_i は $\sigma_i(t_1,\ \cdots,\ t_{m+n})$，$c_j\times c_k$ は $\sigma_j(t_1,\ \cdots,\ t_m)\sigma_k(t_{m+1},\ \cdots,\ t_{m+n})$ でおきかえられる．$\sum\sigma_i\ t_1,\ \cdots,\ t_{m+n})=\prod_{i=1}^{m+n}(1+t_i)=\prod_{i=1}^{m}(1+t_i)\prod_{i=m+1}^{m+n}(1+t_i)=\sum\sigma_j(t_1,\cdots,t_m)\sum\sigma_k(t_{m+1},\ \cdots,\ t_{m+n})$．これから(3)の前半がえられる．後半も同様.　　(終)

Stiefel-Whitney 類

$\boldsymbol{k}$ は標数 2 の体とする．$(G,\ H)=(O(n),\ \boldsymbol{Z}_2{}^n)$ の場合の(3.16)のファイバーバンドル

$$O(n)/\boldsymbol{Z}_2{}^n\xrightarrow{i}B\boldsymbol{Z}_2{}^n\xrightarrow{\rho}BO(n)$$

を考える．(4.10)の生成元 $x_i\in H^1(B\boldsymbol{Z}_2{}^n;\ \boldsymbol{k})$ について，$H^*(B\boldsymbol{Z}_2{}^n;\ \boldsymbol{k})=\boldsymbol{k}[x_1,\ \cdots,\ x_n]$ である．$W_2(O(n))=W(O(n);\ \boldsymbol{Z}_2{}^n)$ の作用を考える．

定理 5.9　$\boldsymbol{k}$ は標数 2 の体とする.

(1)　$\rho^*:H^*(BO(n);\ \boldsymbol{k})\longrightarrow H^*(B\boldsymbol{Z}_2{}^n;\ \boldsymbol{k})$ は単射で,

$$\mathrm{Im}\ \rho^*=H^*(B\boldsymbol{Z}_2{}^n;\ \boldsymbol{k})^{W_2(O(n))}=\boldsymbol{k}[\sigma_1,\ \cdots,\ \sigma_n],\ \ \sigma_i=\sigma_i(x_1,\ \cdots,\ x_n)$$

(2)　$\rho^*\sum w_i=\prod(1+t_i)$ をみたす $w_i\in H^i(BO(n);\ \boldsymbol{k})$ が一意的にあって,

$$H^*(BO(n);\ \boldsymbol{k})=\boldsymbol{k}[w_1,\ w_2,\ \cdots,\ w_n]$$

(3)　$i^*:H^*(B\boldsymbol{Z}_2{}^n;\ \boldsymbol{k})\longrightarrow H^*(O(n)/\boldsymbol{Z}_2{}^n;\ \boldsymbol{k})$ は全射で，次の同型を誘導する：

$$H^*(O(n)/\boldsymbol{Z}_2{}^n;\ \boldsymbol{k})\cong\boldsymbol{k}[t_1,\ \cdots,\ t_n]/(\sigma_1,\ \cdots,\ \sigma_n)$$

[証明]　定理 3.19，定理 4.11，(4.10)および補題 4.18 を使って，定理 5.5 と同様に証明されるが，構造群 $O(n)$ は連結でなく奇数次数の元もあるので，補題 4.5 の代わりに定理 4.4 の仮定：

$$i^*:H^*(B\boldsymbol{Z}_2{}^n;\ \boldsymbol{k})\longrightarrow H^*(O(n)/\boldsymbol{Z}_2{}^n;\ \boldsymbol{k})\ \text{は全射}$$

をいえばよい．定理 4.11 により，$H^*(O(n)/\boldsymbol{Z}_2{}^n;\ \boldsymbol{k})$ は $H^1(O(n)/\boldsymbol{Z}_2{}^n;\ \boldsymbol{k})$ の元で生成されるから

$$i^*:H^1(B\boldsymbol{Z}_2{}^n;\ \boldsymbol{k})\longrightarrow H^1(O(n)/\boldsymbol{Z}_2{}^n;\ \boldsymbol{k})\ \text{は全射}$$

をいえば十分である．一方，ファイバーバンドル $O(n)/\boldsymbol{Z}_2{}^n=SO(n)/S\boldsymbol{Z}_2{}^n\xrightarrow{i_0}BS\boldsymbol{Z}_2{}^n\xrightarrow{\rho}BSO(n)$ の構造群は連結であるから，次の可換図式の第一列は完全

(定理 2.14) かつ p^* は全射：

$$\begin{array}{ccccc} 0=H^1(BSO(n);\ \boldsymbol{k}) & \longrightarrow & H^1(BS\boldsymbol{Z}_2{}^n;\ \boldsymbol{k}) & \xrightarrow{i_0{}^*} & H^1(O(n)/\boldsymbol{Z}_2{}^n;\ \boldsymbol{k}) \\ & & \uparrow p^* & \nearrow i^* & \\ & & H^1(B\boldsymbol{Z}_2{}^n;\ \boldsymbol{k}) & & \end{array}$$

定理 4.11 より $\dim_k H^1(O(n)/\boldsymbol{Z}_2{}^n;\ \boldsymbol{k})=n-1$．また $H^*(BS\boldsymbol{Z}_2{}^n;\ \boldsymbol{k})=\boldsymbol{k}[x_1, \cdots, x_n]/(x_1+\cdots+x_n)$ であるから，$\dim_k H^1(BS\boldsymbol{Z}_2{}^n;\ \boldsymbol{k})=n-1$．よって単射 $i_0{}^*$ は同型，従って i^* は全射である．　(終)

系 5.10　定理 5.9 と同様の結果が $(O(n), \boldsymbol{Z}_2{}^n)$ を $(SO(n), S\boldsymbol{Z}_2{}^n)$ でおきかえて成り立つ．射影 $p: BSO(n)\to BO(n)$ で誘導される準同型 p^* は同型 $\boldsymbol{k}[w_1, w_2, \cdots, w_n]/(w_1)=\boldsymbol{k}[w_2, \cdots, w_n]\cong H^*(BSO(n);\ \boldsymbol{k})$ を与える．

定義　定理 5.9 の $w_i\in H^i(BO(n);\ \boldsymbol{k})$ を $\boldsymbol{i}$ **次 Stiefel-Whitney 類**という．

系 5.10 における $w_i=p^*w_i\in H^i(BSO(n);\ \boldsymbol{k})$ も $\boldsymbol{i}$ **次 Stiefel-Whitney 類**という．

射入 $\boldsymbol{c}: O(n)\subset U(n)$ および $\boldsymbol{r}: U(n)\subset SO(2n)\subset O(2n)$ より，射影

$$\rho_c: BO(n)\longrightarrow BU(n) \quad および \quad \rho_r: BU(n)\longrightarrow BO(2n)$$

をうる．また $\oplus: O(m)\times O(n)\longrightarrow O(m+n)$ より次の写像もえられる：

$$\rho_{m,n}: BO(m)\times BO(n)\longrightarrow BO(m+n)$$

係数環の自然な準同型 $\boldsymbol{Z}\to\boldsymbol{k}$ による，c_i の像を同じ記号 $c_i\in H^{2i}(BU(n);\ \boldsymbol{k})$ で表わす．次の定理では $\boldsymbol{k}$ の標数は 2 とする．

定理 5.11　(1)　$\rho_c{}^*(c_i)=w_i{}^2$，$\rho_c{}^*: H^*(BU(n);\ \boldsymbol{k})\longrightarrow H^*(BO(n);\ \boldsymbol{k})$

(2)　$\rho_r{}^*(w_{2i-1})=0$，$\rho_r{}^*(w_{2i})=c_i$，$\rho_r{}^*: H^*(BO(2n);\ \boldsymbol{k})\longrightarrow H^*(BU(n);\ \boldsymbol{k})$

(3)　$\rho_{m,n}{}^*(w_i)=\sum_{j+k=i} w_j\times w_k$

［証明］　(1)　$\boldsymbol{Z}_2{}^n=O(n)\cap T^n$ であるから右の可換な図式をうる．定理 5.8 (1) と同様な証明を行なうためには，$H^*(BT^n;\ \boldsymbol{k})=\boldsymbol{k}[t_1, \cdots, t_n]$，$H^*(B\boldsymbol{Z}_2{}^n;\ \boldsymbol{k})=\boldsymbol{k}[x_1, \cdots, x_n]$ について，$p^*(t_i)=x_n{}^2$ を証明すればよい．このとき，$\rho_c{}^*(c_i)=\sum_{j+k=2i}\pm w_j w_k=w_i{}^2$ となる．このためには，各成分への射入 $T^1\to T^n$ を考えることによって，$n=1$ の場合

$$\begin{array}{ccc} B\boldsymbol{Z}_2{}^n & \xrightarrow{\rho} & BO(n) \\ \downarrow p & & \downarrow \rho_c \\ BT^n & \xrightarrow{\rho} & BU(n) \end{array}$$

(5.11)′　$p^*: H^2(BT^1;\ \boldsymbol{k}) \longrightarrow H^2(B\boldsymbol{Z}_2;\ \boldsymbol{k})$ において $p^*(t)=x^2$

を示せばよいことがわかる．$T/\boldsymbol{Z}_2=U(1)/\boldsymbol{Z}_2$ は S^1 と同相である．S^1-バンドル $S^1 \longrightarrow B\boldsymbol{Z}_2 \xrightarrow{p} BT$ に関する Gysin 完全系列

$$H^2(BT;\ \boldsymbol{k}) \xrightarrow{p^*} H^2(B\boldsymbol{Z}_2;\ \boldsymbol{k}) \xrightarrow{\lambda} H^1(BT;\ \boldsymbol{k})$$

がある．$H^1(BT;\ \boldsymbol{k})=0$ および $H^2(BT;\ \boldsymbol{k})$，$H^2(B\boldsymbol{Z}_2;\ \boldsymbol{k})$ は t, x^2 で生成されるから (5.11)′をうる($\boldsymbol{k}$ が素体のときを先に考えよ)．

(2)　$\varphi_0=\boldsymbol{r}\circ\boldsymbol{c}: O(n) \longrightarrow O(2n)$ は $\varphi_0(A)=A\oplus A$ および $\varphi_0(\boldsymbol{Z}_2{}^n)\subset\boldsymbol{Z}_2{}^{2n}$ をみたし，右の可換な図式をうる．$\rho_0{}^*: H^*(BO(2n);\ \boldsymbol{k})\rightarrow H^*(BO(n);\ \boldsymbol{k})$ は ρ^* で写して，$\rho_1{}^*: H^*(B\boldsymbol{Z}_2{}^{2n};\ \boldsymbol{k})\rightarrow H^*(B\boldsymbol{Z}_2{}^n;\ \boldsymbol{k})$ で調べられる．ここで，$\rho_1{}^*(x_i)=\rho_1{}^*(x_{i+n})=x_i$ (i=1, …, n) が容易にわかる．$\rho^*(\rho_0{}^*\sum_{i=0}^{2n}w_i)=\rho_1{}^*\rho^*(\sum w_i)=\rho_1{}^*\prod_{i=1}^{2n}(1+x_i)=\prod_{i=1}^{n}(1+x_i)^2=(\rho^*\sum_{i=1}^{n}w_i)^2=\rho^*\sum_{i=1}^{n}w_i{}^2$．故に

$$\begin{array}{ccc} B\boldsymbol{Z}_2{}^n & \xrightarrow{\rho_1} & B\boldsymbol{Z}_2{}^{2n} \\ \downarrow\rho & & \downarrow\rho \\ BO(n) & \xrightarrow{\rho_0} & BO(2n) \end{array}$$

$$\rho_0{}^*(w_{2i-1})=0,\quad \rho_0{}^*(w_{2i})=w_i{}^2$$

である．明らかに，$\rho_0=\rho_r\circ\rho_c \Longrightarrow \rho_0{}^*=\rho_c{}^*\circ\rho_r{}^*$．$H^{\mathrm{odd}}(BU(n);\ \boldsymbol{k})=0 \Longrightarrow \rho_r{}^*(w_{2i-1})=0$．(1) より，$\rho_c{}^*(\rho_r{}^*(w_{2i}))=\rho_0{}^*(w_{2i})=w_i{}^2=\rho_r{}^*(c_i)$．また，(1) は $\rho_c{}^*$ が単射であることも示しているから，$\rho_r{}^*(w_{2i})=c_i$．

(3) の証明は定理 5.8(3) と同様.　(終)

Wu の公式

標数 2 の素体 $\boldsymbol{k}=\boldsymbol{Z}_2$ を係数とするコホモロジー環には Steenrod の平方作用素 $Sq^t: H^n(X;\ \boldsymbol{Z}_2)\rightarrow H^{n+t}(X;\ \boldsymbol{Z}_2)$ があって，(1.16) の性質をもつ．今までに定義した特性類 w_i, c_i, q_i に対する Sq^t の作用を定めるものとして，次の **Wu の公式**がある．2 項係数 $\binom{a}{b}=\dfrac{a!}{b!(a-b)!}$ を拡張して，次の約束をする：

$$\binom{-1}{0}=1$$

定理 5.12　(1)　$Sq^j w_i=\sum_{k=0}^{j}\binom{i-k-1}{j-k}w_{i+j-k}w_k \quad (0\leq j\leq i)$

(2)　$Sq^{2j}c_i=\sum_{k=0}^{j}\binom{i-k-1}{j-k}c_{i+j-k}c_k \quad (0\leq j\leq i)$

(3)　$Sq^{4j}q_i=\sum_{k=0}^{j}\binom{i-k-1}{j-k}q_{i+j-k}q_k \quad (0\leq j\leq i)$

［証明］ (1)　$\rho^*: H^*(BO(n);\ \mathbf{Z}_2) \longrightarrow H^*(BT^n;\ \mathbf{Z}_2)$ が単射であるから，ρ^* を施してえられる等式

$$Sq^j\sigma_i = \sum_{k=0}^{i}\binom{i-k-1}{j-k}\sigma_{i+j-k}\sigma_k,\quad \sigma_i = \sigma_i(x_1,\ \cdots,\ x_n)$$

を示せばよい．$x_1, \cdots, x_n$ の対称式 $\sigma_{a,b} = \sigma_{a,b}(x_1,\ \cdots,\ x_n)$ を等式

$$\prod_{i=1}^{n}(1+x_it+x_i^2u) = \sum_{a,b}\sigma_{a,b}t^au^b$$

で定義する．$\sigma_{a,b}$ は $x_1\cdots x_ax_{a+1}^2\cdots x_{a+b}^2+\cdots$ の形の最小の対称式で，$\sigma_{a,0}=\sigma_a$, $\sigma_{0,b}=\sigma_b^2$. $Sq^0(x_i)=x_i$, $Sq^1(x_i)=x_i^2$, $Sq^j(x_i)=0$ $(j\neq 0,1)$ と Cartan 公式により，

$$Sq^j\sigma_i = Sq^j\sum x_{k_1}\cdots x_{k_i} = \sum_{\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_i=j} Sq^{\varepsilon_1}x_{k_1}\cdots Sq^{\varepsilon_i}x_{k_i} = \sigma_{i-j,j}$$

よって，次の等式(＊)を n に関する帰納法で証明すればよい：

(＊)　$\displaystyle \sigma_{a,b} = \sum_{k=0}^{b}\binom{a+b-k-1}{b-k}\sigma_{a+2b-k}\sigma_k \quad (0\leq b\leq i)$

これは $n=1$ のときは自明．(＊)を $n\geq 1$ で仮定し，変数 $x_1, \cdots, x_{n+1}$ に関する $\sigma_{a,b}$, σ_i を $\sigma'_{a,b}$, σ'_i とし，$t_{n+1}=t$ とおけば

$$\sigma'_i = \sigma_i+\sigma_{i-1}t,\quad \sigma'_{a,b} = \sigma_{a,b}+\sigma_{a-1,b}t+\sigma_{a,b-1}t^2$$

従って，(＊)は次のように帰納的に示される．

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{b}\binom{a+b-k-1}{b-k}\sigma'_{a+2b-k}\sigma'_k \\
&\qquad = \sum_{k=0}^{b}\binom{a+b-k-1}{b-k}(\sigma_{a+2b-k}+\sigma_{a+2b-k-1}t)(\sigma_k+\sigma_{k-1}t) \\
&\qquad = \sum_{k=0}^{b}\binom{a+b-k-1}{b-k}\sigma_{a+2b-k}\sigma_k \\
&\qquad\quad + \sum_{k=0}^{b-1}\left\{\binom{a+b-k-1}{b-k}+\binom{a+b-k-2}{b-k-1}\right\}\sigma_{a+2b-k-1}\sigma_b t \\
&\qquad\quad + \sigma_{a+b-1}\sigma_b t + \sum_{k=0}^{b-1}\binom{a+b-k-2}{b-k-1}\sigma_{a+2(b-1)-k}\sigma_k t^2 \\
&\qquad = \sigma_{a,b} + \sum_{k=0}^{b}\binom{a+b-k-2}{b-k}\sigma_{a+2b-k-1}\sigma_k t + \sigma_{a,b-1}t^2 \\
&\qquad = \sigma_{a,b}+\sigma_{a-1,b}t+\sigma_{a,b-1}t^2 = \sigma'_{a,b}
\end{aligned}$$

(2)，(3)は同様に，$Sq^0=\mathrm{id}$, $Sq^2(t_i)=t_i^2$, $Sq^4(t_i^2)=t_i^4$, $Sq^j(t_i)=0$ $(j\neq 0,2)$, $Sq^j(t_i^2)=0$ $(j\neq 0,\ 4)$ よりえられる．　　(終)

Euler 類，Pontrjagin 類

§3における球バンドル $S^{m-1}\to E\to B$ の Euler 類 $\chi\in H^m(B;\ R)$ は $H^m(D^m,$

S^{m-1}; $R)\cong H^{m-1}(S^{m-1}$; $R)\cong R$ の生成元のとり方に依存している．次の補題において，$R=\boldsymbol{Z}$ のときは適当な符号をとって生成元をとりかえるものとする．$R=\boldsymbol{k}$ が標数2の体のときは素体 $\boldsymbol{Z}_2$ の生成元1に対応するものとして一意的である．

補題 5.13　(1)　球バンドル $S^{2n-1}=U(n)/U(n-1)\longrightarrow BU(n-1)\xrightarrow{p}BU(n)$ の Euler 類 $\chi=c_n\in H^{2n}(BU(n))$．$U$ を SU におきかえても同様．

(2)　球バンドル $S^{4n-1}=Sp(n)/Sp(n-1)\longrightarrow BSp(n-1)\xrightarrow{p}BSp(n)$ の Euler 類 $\chi=q_n\in H^{4n}(BSp(n))$．

(3)　球バンドル $S^{n-1}=O(n)/O(n-1)\longrightarrow BO(n-1)\xrightarrow{p}BO(n)$ のEuler 類 $\chi=w_n\in H^n(BO(n);\ \boldsymbol{k})$ ($\boldsymbol{k}$：標数2の体)．O を SO におきかえても同様．

［証明］　まず(1), (2), (3)の各射影 p について，

(5.13)′　$p^*(c_i)=c_i,\ \ p^*(q_i)=q_i,\ \ p^*(w_i)=w_i\quad (0\leq i\leq n-1)$

$p^*(c_n)=0,\ \ p^*(q_n)=0,\ \ p^*(w_n)=0$

を示す．(1)の場合は定理5.5の単射 ρ^* によって，$\rho_0: BT^{n-1}\longrightarrow BT^n$ について，$\rho_0{}^*(\sigma_i(t_1,\ \cdots,\ t_n))=\sigma_i(t_1,\ \cdots,\ t_{n-1})$ を示せばよい ($\sigma_n(t_1,\ \cdots,\ t_{n-1})=0$)．これは $\rho_0{}^*(t_i)=t_i$ $(1\leq i\leq n-1)$，$\rho_0{}^*(t_n)=0$ より明らか．(2), (3)の場合も同様．

各球バンドルの Gysin 完全系列から補題がえられる．　(終)

射入 $\boldsymbol{c}: SO(n)\subset U(n)$ からえられる射影 $\rho_c: BSO(n)\rightarrow BU(n)$ で誘導される

$$\rho_c{}^*: H^*(BU(n))\longrightarrow H^*(BSO(n))$$

について，

定義　$p_i=(-1)^i\rho_c{}^*(c_{2i})\in H^{4i}(BSO(n))$ を $\boldsymbol{i}$ **次 Pontrjagin 類**という．

定理5.11 (1)より

(5.14)　$p_i\equiv w_{2i}{}^2\pmod 2$

$m=[n/2]$ とおくとき，$T^m\subset SO(n)$，　$\boldsymbol{r}: U(m)\subset SO(n)$

からえられる射影

$$\rho: BT^m\longrightarrow BSO(n),\qquad \rho_r: BU(m)\longrightarrow BSO(n)$$

に関して次の補題が成り立つ．

補題 5.15　(1)　$\rho^*(p_i)=\bar{\sigma}_i=\sigma_i(t_1{}^2,\ \cdots,\ t_n{}^2)\in H^{4i}(BT^m)$

(2)　$\rho_r{}^*(p_i)=\sum_{j+k=i}(-1)^jc_jc_k\in H^{4i}(BU(m))$

［証明］　まず次のことに注意しよう．

(5.16) $T_0{}^m = g^{-1}T^m g$, $g \in G$, を T^m の共役部分群, $h_g : T^m \longrightarrow T_0{}^m \Longleftrightarrow h_g(t) = g^{-1}tg$ とすると, $\bar{h}_g : BT^m \longrightarrow BT_0{}^m$ があって次の図式は可換：

$$\begin{array}{ccc} BT^m & \xrightarrow{\rho} & \\ \downarrow \bar{h}_g & & BG \\ BT_0{}^m & \xrightarrow{\rho} & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} H^1(T_0{}^m) & \xrightarrow{\tau} & H^2(BT_0{}^m) \\ \downarrow h_g{}^* & & \downarrow \bar{h}_g{}^* \\ H^1(T^m) & \xrightarrow{\tau} & H^2(BT^m) \end{array}$$

実際 $\cdot g : EG \longrightarrow EG$ は $\rho \circ \bar{h}_g = \rho$ をみたす $\bar{h}_g$ を誘導し, (4.13)$'$における λ_e について, $(\cdot g) \circ \lambda_e = \lambda_e \circ h_g$ であるから第2の可換図式をうる.

補題において, $n=2m$ としてよいことは(5.13)$'$ よりわかる. $U(m)$ における T^m を $SO(2m)$ におけるものと区別するために $T_U{}^m \subset U(m)$ とかく.

$$\begin{array}{ccccccc} BT_U{}^m & \xrightarrow{\bar{h}_{g'}} & BT^m & \xrightarrow{\bar{h}_g} & BT_0{}^m & \xrightarrow{p} & BT_U{}^{2m} \\ \rho \downarrow & & \downarrow \rho & & & & \downarrow \rho \\ BU(m) & \xrightarrow{\rho_r} & BSO(2m) & & \xrightarrow{\rho_c} & & BU(2m) \end{array}$$

上の可換な図式を考える. ここで, $g' \in SO(2m)$ はある置換行列 P_σ であり, $h_{g'} : T_0{}^m \longrightarrow T^m$ は各成分では同型 $\boldsymbol{r} : U(1) \cong SO(2)$ と一致するものである. また, $T_0{}^m = g^{-1}T^m g$, $g \in U(2m)$, は第1章, (2.7) (3) の $\eta_m = \eta$ について $g^{-1} = P_\sigma \eta$ で与えられるもので, $h_g(h_{g'}(A)) = A \oplus \bar{A}$, $A \in T^m$, をみたす. この図式と (5.16) の助けをかりて, $\rho^*((-1)^i p_i) = \rho^* \rho_c{}^*(c_{2i}) = \bar{h}_g{}^* p^* \rho^*(c_{2i}) = \bar{h}_g{}^* p^* \sigma_{2i}(t_1, \cdots, t_{2n}) = \sigma_{2i}(t_1, \cdots, t_n, -t_1, \cdots, -t_n)$. 定理 5.8(2) の証明と同様にして, $\sigma_{2i}(t_1, \cdots, t_n, -t_1, \cdots, -t_n) = \sigma_i(t_i{}^2, \cdots, t_n{}^2) = \bar{\sigma}_i$. また, (2)の証明は定理 5.8(1) の証明と同様.

(終)

定理 5.16 $\boldsymbol{k}$ を標数$\neq 2$の体とし, $m = [n/2]$ とする.

(1) $\rho^* : H^*(BSO(n); \boldsymbol{k}) \longrightarrow H^*(BT^m; \boldsymbol{k})$ は単射, かつ

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}\, \rho^* = H^*(BT^m; \boldsymbol{k})^{W(SO(n))} &= \boldsymbol{k}[\bar{\sigma}_1, \cdots, \bar{\sigma}_m] && (n=2m+1 \text{ のとき}) \\ &= \boldsymbol{k}[\bar{\sigma}_1, \cdots, \bar{\sigma}_{m-1}, \sigma_m] && (n=2m \text{ のとき}) \end{aligned}$$

(2) $\rho^*(\sum_{i=0}^{m} p_i) = \prod_{j=1}^{m}(1+t_j{}^2)$ をみたす $p_i \in H^{4i}(BSO(n); \boldsymbol{k})$ と, $n=2m$ のときは $\rho^*(\chi) = \sigma_m = t_1 \cdots t_m$ をみたす $\chi \in H^{2m}(BSO(2m); \boldsymbol{k})$ が一意的に存在して,

$$H^*(BSO(2m+1); \boldsymbol{k}) = \boldsymbol{k}[p_1, \cdots, p_m]$$

$$H^*(BSO(2m); \boldsymbol{k}) = \boldsymbol{k}[p_1, \cdots, p_{m-1}, \chi], \quad \chi^2 = p_m$$

(3) $i^* : H^*(BSO(n); \boldsymbol{k}) \longrightarrow H^*(SO(n)/T^m; \boldsymbol{k})$ は全射であり, 同型

$$\boldsymbol{k}[t_1, \cdots, t_m]/(p_1, \cdots, p_{m-1}, (p_m \text{ または } \chi)) \cong H^*(SO(n)/T^m; \boldsymbol{k})$$

を誘導する．

［証明］ 定理 5.5 と同様に証明される．　(終)

補題 5.15 は p_i を特徴づけていることに注意する．

定理 5.17 (1) $\rho^*(\chi)=\sigma_m=t_1t_2\cdots t_m$ および $\chi\equiv w_m{}^2 (\mathrm{mod}\ 2)$ をみたす $\chi\in H^{2m}(BSO(2m))$ が一意的に存在する．このとき，$\rho_r{}^*(\chi)=c_m$．

(2) $H^*(BSO(n))=F\oplus T_2$ と直和分解される．ただし

(i) F は自由部分群で

$$F=\begin{cases} \boldsymbol{Z}[p_1,\ \cdots,\ p_m] & (n=2m+1) \\ \boldsymbol{Z}[p_1,\ \cdots,\ p_{m-1},\chi] & (n=2m) \end{cases}$$

(ii) T_2 は初等的 2-群(各元の位数は 2)で，mod 2 reduction $\rho_2: H^*(BSO(n))\longrightarrow H^*(BSO(n);\ \boldsymbol{Z}_2)$ によって，$Sq^1: H^{*-1}(BSO(n);\ \boldsymbol{Z}_2)\longrightarrow H^*(BSO(n);\ \boldsymbol{Z}_2)$ の像の上へ同型に写される．

［証明］ (2)を先に考える．補題 1.15 の結果を定理 5.16 に適用して，$H^*(BSO(n))$ に p-torsion$(p\neq 2)$ がなく，(i) の F について $F\subset H^*(BSO(n))$，かつ$H^*(BSO(n))/F=$(2-torsion) がわかる．さらに補題 1.15 (3)によって，$\beta=\beta_2=Sq^1$ について，

$$(*)\qquad H_\beta(H^*(BSO(n);\ \boldsymbol{Z}_2))\cong F\otimes\boldsymbol{Z}_2$$

がわかれば，$H^*(BSO(n))=F\oplus T_2$ かつ T_2 は初等的 2-群であることがわかる．このとき (ii) は Bockstein 完全系列から直ちにえられる．

Wu の公式(定理 5.12(1))において $j=1$ とすれば

$$(5.18)\qquad \beta(w_i)=Sq^1w_i=w_iw_1+(i+1)w_{i+1}$$

$H^*(BSO(n);\ \boldsymbol{Z}_2)=\boldsymbol{Z}_2[w_2,\ \cdots,\ w_n]$，$w_1=0$, においては

$$(5.18)'\quad \beta(w_{2j})=w_{2j+1},\quad \beta(w_{2j+1})=0\quad (j\geq 1)$$

よって，$n=2m+1$ のときは Künneth の公式を用いて，

$$H_\beta(H^*(BSO(n);\ \boldsymbol{Z}_2))=H_\beta(\otimes\boldsymbol{Z}_2[w_{2j},\ w_{2j+1}])\cong\otimes H_\beta(\boldsymbol{Z}_2[w_{2j},\ \beta(w_{2j})])$$

ここで，$\boldsymbol{Z}_2[x,\ \beta x]$ において，$\beta(x^{2i}(\beta x)^j)=0$，$\beta(x^{2i+1}(\beta x)^j)=x^{2i}(\beta x)^{j+1}$ であることから，$H_\beta(\boldsymbol{Z}_2[x,\ \beta x])\cong\boldsymbol{Z}_2[x^2]$ がえられる．よって

$$H_\beta(H^*(BSO(2m+1);\ \boldsymbol{Z}_2))\cong\boldsymbol{Z}_2[w_{2j}{}^2]\cong\boldsymbol{Z}_2[p_1,\ \cdots,\ p_m]\cong F\otimes\boldsymbol{Z}_2$$

$$\begin{aligned} H_\beta(H^*(BSO(2m);\ \boldsymbol{Z}_2))&\cong H_\beta(H^*(BSO(2m-1);\ \boldsymbol{Z}_2))\otimes\boldsymbol{Z}_2[w_{2m}] \\ &\cong\boldsymbol{Z}_2[p_1,\cdots,\ p_{m-1},\ \chi]\cong F\otimes\boldsymbol{Z}_2 \end{aligned}$$

(1)については Euler 類を χ' とすると，$\rho_r{}^*(\chi')=\pm c_m$，$\chi'\equiv w_{2m} \pmod 2$ であるから $\chi=\pm\chi'$ とおけば，(2)よりそれは一意的である．　(終)

この定理で定まる χ を **$BSO(2m)$ における Euler 類**ということにする．

§6　古典型対称空間のコホモロジー

対称対と対称空間について

G を(コンパクト)Lie 群，K をその閉部分群とする．

定義　(G, K) が**対称対**$\Longleftrightarrow$自己同型 $\sigma: G\to G$ で，$\sigma^2=1_G$，かつ $G^\sigma=\{g\in G\,|\,\sigma(g)=g\}$ に対して，$G^\sigma\supset K\supset(G^\sigma)_e=$(単位元 e の成分)．

M が(コンパクト)**対称空間**$\Longleftrightarrow$$M$ は連結(コンパクト)Riemann 多様体でその各点 $x\in M$ に対して，等長変換 $\sigma_x: M\to M$ で，$\sigma_x{}^2=1_M$ かつ $(d\sigma_x)_x: T_xM\to T_xM$ は点対称 $(\boldsymbol{v}\to-\boldsymbol{v})$ である．

対称空間 M において，σ_x は x を通る測地線を x を中心にして反転させるものである．従って，M の2点 y, z を通る測地線の中点を x とすれば，$\sigma_x(y)=z$ である．M の等長変換全体 $I(M)$ のなす Lie 群(となることが知られている)は，M に推移的に作用することになるから，$M\cong I(M)/K_p$，$K_p=\{g\in I(M)\,|\,g(p)=p\}$．さらに，$\sigma_p: M\to M$ について，

$$\sigma: I(M)\longrightarrow I(M)\Longleftrightarrow\sigma(g)=\sigma_p g\sigma_p{}^{-1}$$

とおけば，明らかに $\sigma^2=1$．$g\in K_p\Longleftrightarrow g(p)=p\Longrightarrow\sigma(g)(p)=\sigma_p g\sigma_p{}^{-1}(p)=p\Longrightarrow\sigma(g)\in K_p$ であるから，$K_p\subset I(M)^\sigma$．逆に，$g\in I(M)^\sigma\Longrightarrow\sigma_p(g(p))=\sigma_p g\,\sigma_p{}^{-1}(p)=\sigma(g)(p)=g(p)$．ここで，$g$ が単位元 e に十分近ければ，$g(p)$ は p の近くにある σ の不動点，従って，$g(p)=p\Longrightarrow g\in K_p$．以上のことから，

(6.1)　対称空間 M に対して，$M\cong G/K$ となる対称対 (G, K) がある．

逆に対称対 (G, K) において，G に G-不変な Riemann 計量を与え，G/K にそれで誘導される Riemann 計量を入れると，G の G/K への作用は等長変換である．G/K の各点 $x=gK$ に対して，等長変換 σ_x を

$$\sigma_x: G/K\longrightarrow G/K\Longleftrightarrow\sigma_x(y)=(g\sigma g^{-1})y\quad(y\in G/K)$$

で定義できる．明らかに $\sigma_x{}^2=1_{G/K}$．また，$d\sigma_x$ の状態は dL_g を使って，$d\sigma_e$ の状態に帰着され，そこでは $(d\sigma_e)_e: T_e(G/K) \longrightarrow T_e(G/K)$ は原点のみを不動点にもち $(d\sigma_e)^2=1$ であるから，点対称でなければならない．以上のことから，

(6.2)　対称対 (G, K) について，G/K は対称空間となる．

Lie 群 G の直積 $G\times G$ において，$\sigma(g, h)=(h, g)$ とおけば，$G^\sigma=\{(g, g)|g\in G\}$，かつ　$(G\times G)/G^\sigma\cong G$ (微分同相)．よって，

(6.3)　Lie 群は対称空間である．

2つの対称空間の直積は，明らかに対称空間である．対称空間の直積に分解されない対称空間を**既約対称空間**という．また，被覆空間 $(\tilde{M}, p, M)$ において，M が対称空間であれば $\tilde{M}$ も対称空間である．

E. Cartan は単連結既約対称空間 $M=G/K$ を分類した．ここで G は単純 Lie 群となる．G が古典群のときは対称空間 G/K は古典型であるといわれる．**古典型既約対称空間**　$M=G/K$ は次の8つの型に分類される(左端の記号は E Cartan によるものである)．

(AⅠ)　$SU(n)/\boldsymbol{c}(SO(n))$; $\sigma(A)=\overline{A}$

(AⅡ)　$SU(2n)/\boldsymbol{c}'(Sp(n))$; $\sigma(A)=J_n\overline{A}J_n{}^{-1}$, $J_n=\begin{pmatrix} O & -I_n \\ I_n & O \end{pmatrix}$

(AⅢ)　$U(p+q)/U(p)\times U(q)$; $\sigma(A)=JAJ^{-1}$, $J=(-I_p)\oplus I_q$

(BDⅠ)　$SO(p+q)/SO(p)\times SO(q)$; $\sigma(A)=JAJ^{-1}$, $J=(-I_p)\oplus I_q$

(BDⅡ)　$SO(p+1)/SO(p)$　(上で $q=1$ のとき)

(CⅠ)　$Sp(n)/\boldsymbol{q}(U(n))$; $\sigma(A)=(\boldsymbol{i}I_n)A(-\boldsymbol{i}I_n)$

(CⅡ)　$Sp(p+q)/Sp(p)\times Sp(q)$; $\sigma(A)=JAJ^{-1}$, $J=(-I_p)\oplus I_q$

(DⅢ)　$SO(2n)/\boldsymbol{r}(U(n))$; $\sigma(A)=J_nAJ_n{}^{-1}$, $J_n=\begin{pmatrix} O & -I_n \\ I_n & O \end{pmatrix}$

以下，これらのコホモロジー環を考えよう．ただし，対称空間の性質が計算に必要な訳ではない．

古典群，分類空間，等質空間のコホモロジー環の関係

ファイバー空間 (E, p, B) における転入 τ および懸垂 σ (Fはファイバー)

$$H^i(F;\ R)\underset{\sigma}{\overset{\tau}{\rightleftarrows}}H^{i+1}(B;\ R)\quad (i>0)$$

は定義域に制限があり値も適当な部分群を法として定まるものであるが，定義

されている限り互いに逆であり，ファイバー写像 $(f, \bar{f})$ に関する自然性

$$(6.4)\qquad \begin{array}{ccc} H^i(F;\ R) & \overset{\sigma}{\underset{\tau}{\rightleftarrows}} & H^{i+1}(B;\ R) \\ \uparrow f^* & & \uparrow \bar{f}^* \\ H^i(F';\ R) & \overset{\tau}{\underset{\sigma}{\rightleftarrows}} & H^{i+1}(B';\ R) \end{array} \qquad \left(\begin{array}{ccccc} F & \xrightarrow{i} & E & \xrightarrow{p} & B \\ \downarrow f & & \downarrow f & & \downarrow \bar{f} \\ F' & \xrightarrow{i'} & E' & \xrightarrow{p'} & B' \end{array}\right)$$

(の可換性)が成り立つ．

分類空間に関係したこの種の可換図式を以下に示す(第2章，§6参照)：

$$(6.4.1)\qquad \begin{array}{ccc} H^i(H;\ R) & \overset{\sigma}{\underset{\tau}{\rightleftarrows}} & H^{i+1}(BH;\ R) \\ \uparrow i^* & & \uparrow \rho^* \\ H^i(G;\ R) & \overset{\sigma}{\underset{\tau}{\rightleftarrows}} & H^{i+1}(BG;\ R) \end{array} \qquad \left(\begin{array}{ccccc} H & \longrightarrow & EH & \longrightarrow & BH \\ \downarrow i & & \| & & \downarrow \rho=Bi \\ G & \longrightarrow & EG & \longrightarrow & BG \end{array}\right)$$

$$(6.4.2)\qquad \begin{array}{ccc} H^i(G;\ R) & \overset{\sigma}{\underset{\tau}{\rightleftarrows}} & H^{i+1}(BG;\ R) \\ \uparrow p^* & & \| \\ H^i(G/H;R) & \overset{\sigma}{\underset{\tau}{\rightleftarrows}} & H^{i+1}(BG;\ R) \end{array} \qquad \left(\begin{array}{ccccc} G & \longrightarrow & EG & \longrightarrow & BG \\ \downarrow p & & \downarrow & & \| \\ G/H & \to & BH=EG/H & \to & BG \end{array}\right)$$

$$(6.4.3)\qquad \begin{array}{ccc} H^i(H;\ R) & \overset{\sigma}{\underset{\tau}{\rightleftarrows}} & H^{i+1}(BH;\ R) \\ \uparrow i^* & & \| \\ H^i(G;\ R) & \overset{\sigma}{\underset{\tau}{\rightleftarrows}} & H^{i+1}(BH;\ R) \end{array} \qquad \left(\begin{array}{ccccc} H & \longrightarrow & EG & \longrightarrow & BH \\ \downarrow i & & \downarrow i_1 & & \| \\ G \xrightarrow{\pi} G/H & \cong & EG\times G/H & \xrightarrow{p} & BH \end{array}\right)$$

定理 6.5　(1)　$H^*(U(n))=\Lambda(e_1,\ e_3,\ \cdots,\ e_{2n-1})$,

$H^*(SU(n))=\Lambda(e_3,\ e_5,\ \cdots,\ e_{2n-1})$,　　　ただし $e_{2i-1}=\sigma(c_i)\in H^{2i-1}$

(2)　$H^*(Sp(n))=\Lambda(e_3,\ e_7,\ \cdots,\ e_{4n-1})$,　　　ただし $e_{4i-1}=\sigma(q_i)\in H^{4i-1}$

(3)　$\boldsymbol{k}$ が標数 $\neq 2$ の 体 の と き，$H^*(SO(2m+1);\ \boldsymbol{k})=\Lambda(e_3,\ e_7,\ \cdots,\ e_{4m-1})$,

$H^*(SO(2m);\ \boldsymbol{k})=\Lambda(e_3,\ e_7,\ \cdots,\ e_{4m-5},\ s_{2m-1})$,

ただし，$e_{4i-1}=\sigma(p_i)\in H^{4i-1}$,　$s_{2m-1}=\sigma(\chi)\in H^{2m-1}$

(4)　射入 $i: G(n-1)\to G(n)$, $G=U,\ SU,\ Sp,\ SO$, が誘導する準同型対応 i^* は同じ記号の生成元を対応させ，対応するものがない生成元を0に写す．また，射影 $p: G(n)\to S^{dn-1}$ について，e_{2n-1}, e_{4n-1}, $s_{2m-1}(n=2m)$ は $H^{dn-1}(S^{dn-1})$ の生成元の像である．

［証明］　まず，(4)の前半が σ の自然性からえられる((5.13)′参照)．(4)の後半は Serre の完全系列からえられる．(1), (2)は $G(n-1)\to G(n)\to S^{dn-1}(G=U,$

SU, Sp) に関するスペクトル系列が自明なことから，帰納的にえられる．(3) も $SO(2m-1)\to SO(2m)\to S^{2m-1}$ および $SO(2m-1)\to SO(2m+1)\to V_{2m+1,2}(\boldsymbol{R})$ を使って同様．（終）

定理 6.6　$\boldsymbol{k}$ は標数 2 の体とする．

(1)　$e_i=\sigma(w_{i+1})\in H^i(SO(n);\ \boldsymbol{k})$ について，

$$H^*(SO(n);\ \boldsymbol{k})=\Delta(e_1,\ e_2,\ \cdots,e_{n-1})$$

(2)　$e_i{}^2=e_{2i}$ ($2i\geq n$ のときは $e_i{}^2=0$)，従って $m=[n/2]$ について

$$H^*(SO(n);\ \boldsymbol{k})=\boldsymbol{k}[e_1,\ e_3,\ \cdots,\ e_{2m-1}]/(e_1{}^{a_1},\ \cdots,\ e_{2m-1}^{a_m})$$

ただし，a_i は $2^{a_i}(2i-1)\geq n$ となる最小の整数とする．

(3)　$(\boldsymbol{k}=\boldsymbol{Z}_2)$　$Sq^je_i=\binom{i}{j}e_{i+j}$，$0\leq j\leq i$

［証明］ (1)については，定理 6.5 と同様．σ は Sq^j と可換，かつ正の次数の元 x, y について $\sigma(xy)=0$ をみたす．Wu の公式(定理 5.12(1))より $Sq^je_i=Sq^j(\sigma(w_{i+1}))=\sigma(Sq^jw_{i+1})=\sigma\left(\binom{i}{j}w_{i+j+1}+\binom{i-1}{j-1}w_{i+j}w_1+\cdots\right)=\binom{i}{j}e_{i+j}$, $(0\leq j\leq i)$. よって(3)をうる．特に，$e_i{}^2=Sq^ie_i=e_{2i}$ より (2) をうる．（終）

定理 6.7　(1)　$\boldsymbol{c}'$: $Sp(n)\subset SU(2n)\subset U(2n)$ と定理 6.5 の (1), (2) の生成元について，$\boldsymbol{c}'^*(e_{4i-3})=0$，$\boldsymbol{c}'^*(e_{4i-1})=(-1)^ie_{4i-1}$，$\boldsymbol{c}'^*$ は全射．$c_{2i-1}\in H^{4i-2}(BU(n))$ の懸垂像 $e_{4i-3}=\sigma(c_{2i-1})\in H^{4i-3}(U(2n)/Sp(n))$ が一意的に定まり，射影 p : $U(2n)\to U(2n)/Sp(n)$ について，$p^*(e_{4i-3})=e_{4i-3}\in H^{4i-3}(U(2n))$ かつ

$$H^*(U\,2n)/Sp(n))=\Lambda(e_1,\ e_5,\ e_9,\ \cdots,\ e_{4n-3})$$

e_1 を除外すれば，$SU(2n)/Sp(n)$ に関する結果がえられる．

(2)　$\boldsymbol{k}$ を標数 $\neq 2$ の体とする．射入 i : $SO(n)\subset SU(n)\subset U(n)$ と定理 6.5 の (1), (3)の生成元について，$i^*(e_{4i-3})=0$，$i^*(e_{4i-1})=(-1)^ie_{4i-1}$，$n=2m$ のときは $i^*(e_{2m})=\chi$ をみたす $e_{2m}\in H^{2m}(U(2m)/SO(2m);\boldsymbol{k})$ がある．$c_{2i-1}\in H^{4i-2}(BU(n);\boldsymbol{k})$ の懸垂像 $e_{4i-3}=\sigma(c_{2i-1})\in H^{4i-3}(U(n)/SO(n);\boldsymbol{k})$ が一意的に定まり，射影 p : $U(n)\to U(n)/SO(n)$ について，$p^*(e_{4i-3})=e_{4i-3}\in H^{4i-3}(U(n);\boldsymbol{k})$ とおけば

$$H^*(U(n)/SO(n);\boldsymbol{k})=\begin{cases}\Lambda(e_1,\ e_5,\ e_9,\ \cdots,\ e_{4m+1}), & n=2m+1\\ \Lambda(e_1,\ e_5,\ \cdots,\ e_{4m-3})\otimes\Delta(e_{2m}), & n=2m\end{cases}$$

e_1 を除外すれば $SU(n)/SO(n)$ に関する結果がえられる．

(3)　$\boldsymbol{k}$ を標数 2 の体とする．(2)の射入 i，射影 p について，$i^*=0$: $H^*(U$

(n)；$\boldsymbol{k})\to H^*(SO(n)$；$\boldsymbol{k})$，$p^*=0: H^*(U(n)/SO(n)$；$\boldsymbol{k})\to H^*(U(n)$；$\boldsymbol{k})$．射入 $\iota: U(n)/SO(n)\to BSO(n)$ について，$e_i=\iota^*(w_i)\in H^i(U(n)/SO(n)$；$\boldsymbol{k})$ とおけば

$$H^*(U(n)/SO(n);\ \boldsymbol{k})=\Lambda(e_1,\ e_2,\ \cdots,\ e_n)$$

e_1 を除外すれば $SU(n)/SO(n)$ に関する結果がえられる．

［証明］　(1)　$\boldsymbol{c}'^*$ に関する結果は(6.4.1)を $(G,\ H)=(U(2n),\ Sp(n))$ にとって，定理5.8(2)よりえられる．また(6.4.2)より $p^*(e_{4i-3})=e_{4i-3}=\sigma(c_{2i-1})$．ファイバーバンドル $U(2n)\xrightarrow{i} EU(2n)\times_{Sp(n)}U(2n)\longrightarrow BSp(n)$ に関するスペクトル系列において，$E_2=\boldsymbol{Z}[q_1,\ \cdots,\ q_n]\otimes\Lambda(\sigma(c_1),\ \cdots,\ \sigma(c_{2n}))$．(6.4.3)より，$d_{4i}(1\otimes\sigma(c_{2i}))=q_i\otimes 1$，$d_r(1\otimes\sigma(c_{2i-1}))=0\Longrightarrow E_\infty=\Lambda(\sigma(c_1),\ \sigma(c_3),\ \cdots,\ \sigma(c_{2n-1}))$．$i$ は $p: U(2n)\longrightarrow U(2n)/Sp(n)$ と同値 $\Longrightarrow H^*(U(2n)/Sp(n))=\Lambda(e_1, e_5,\ \cdots,\ e_{4n-3})$，$p^*(e_{4i-3})=\sigma(c_{2i-1})$ となる e_{4i-3} がある．(6.4.2)より，この e_{4i-3} は c_{2i-1} の懸垂像である．明らかに，p^* は単射であるから，e_{4i-3} は一意的．

(2)　$n=2m+1$ のときは(1)と同様に示される．$n=2m$ の場合は(1)における E_2 が $E_2=\boldsymbol{k}[p_1,\ \cdots,\ p_{m-1},\ \chi]\otimes\Lambda(\sigma(c_1),\ \cdots,\ \sigma(c_{2n-1}))$ となり，$d_{4n}(1\otimes\sigma(c_{2n}))=p_m\otimes 1=\chi^2\otimes 1$ に注意すれば，$H^*(U(2m)/SO(2m)$；$\boldsymbol{k})=\Lambda(e_1, e_5,\ \cdots,\ e_{4m-3})\otimes\Delta(e_{2m})$，$i^*(e_{2m})=\chi$，がでる．

(3)　(1)と同様にスペクトル系列

$$E_2=H^*(BSO(n);\ \boldsymbol{k})\otimes H^*(U(n);\ \boldsymbol{k})\Longrightarrow H^*(U(n)/SO(n);\ \boldsymbol{k})$$

を考える．$E_2=\boldsymbol{k}[w_1,\ \cdots,\ w_n]\otimes\boldsymbol{k}[\sigma(c_1),\ \cdots,\ \sigma(c_n)]$ において，(6.4.3)より $\tau(\sigma(c_i))=\rho_c^*(c_i)$．ここで，定理5.11 (1)を使って，$\tau(\sigma(c_i))=w_i^2$，即ち，$d_{2i}(1\otimes\sigma(c_i))=w_i^2\otimes 1$．これを使って，$E_\infty=\Lambda(w_1,\ \cdots,\ w_n)\Longrightarrow H^*(U(n)/SO(n)$；$\boldsymbol{k})=\Delta(e_1,\ e_2,\ \cdots,\ e_n)$．$\rho_c\circ\iota=0$(定値写像)$\Longrightarrow 0=(\iota^*\circ\rho_c^*)(c_i)=\iota^*(w_i^2)=e_i^2$．よって，$H^*(U(n)/SO(n)$；$\boldsymbol{k})=\Lambda(e_1,\ \cdots,\ e_n)$．　(終)

G/K (K：最大階数) のコホモロジー環

定義　T^n を G の標準的極大トーラスとするとき，

G の閉部分群 K が**最大階数**$\Longleftrightarrow T=g^{-1}T^ng\subset K$ となる $g\in G$ がある．

この場合は次の2つのファイバーバンドルがよく使われる：

(6.8)　$K/T\xrightarrow{i}G/T\xrightarrow{p}G/K,\qquad G/K\xrightarrow{\iota}BK\xrightarrow{\rho}BG$

定理 6.9　(1)　$\iota^*: H^*(BU(n))\to H^*(Sp(n)/U(n))$ は全射で次の同型を導く：

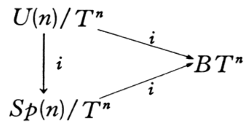
$$H^*(Sp(n)/U(n)) \cong \boldsymbol{Z}[c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_n]/(\sum_{i+j=2k}(-1)^i c_i c_j;\ k \geq 1)$$

(2)　$\iota^* : H^*(B(U\,m) \times U(n))) \to H^*(U(m+n)/U(m) \times U(n))$ は全射で次の同型を導く：

$$H^*(U(m+n)/U(m) \times U(n))$$
$$\cong (\boldsymbol{Z}[c_1, \cdots, c_m] \otimes \boldsymbol{Z}[c_1,\ \cdots,\ c_n])/(\sum_{i+j=k} c_i \otimes c_j;\ k \geq 1)$$

(3)　$\iota^* : H^*(B(Sp(m) \times Sp(n))) \longrightarrow H^*(Sp(m+n)/Sp(m) \times Sp(n))$ は全射で次の同型を導く：

$$H^*(Sp(m+n)/Sp(m) \times Sp(n))$$
$$\cong (\boldsymbol{Z}[q_1,\ \cdots,\ q_m] \otimes \boldsymbol{Z}[q_1,\ \cdots,\ q_n])/(\sum_{i+j=k} q_i \otimes q_j;\ k \geq 1)$$



［証明］　(1)　右の可換図式と，$i^* : H^*(BT^n) \longrightarrow H^*(U(n)/T^n)$ が全射(定理 5.5 (3))より，

$$i^* : H^*(Sp(n)/T^n) \longrightarrow H^*(U(n)/T^n)$$

は全射．定理 4.4 によって，$p^* : H^*(Sp(n)/U(n)) \to H^*(U(n)/T^n)$ は単射．定理 4.6 より，$H^*(Sp(n)/U(n))$ は自由で奇数次数は 0．同じことは $H^*(BSp(n))$ でもいえる (定理 5.6) から，補題 4.5 (1) によって，$Sp(n)/U(n) \xrightarrow{i} BU(n) \xrightarrow{\rho} BSp(n)$ に定理4.2 を適用して，

$$H^*(Sp(n)/U(n)) \cong H^*(BU(n))/(\mathrm{Im}\,\rho^+) = \boldsymbol{Z}[c_1,\ \cdots,\ c_n]/(\rho^*(q_k);\ k \geq 1)$$

ここで，$\rho^*(q_k) = (-1)^k \sum_{i+j=2k}(-1)^i c_i c_j$ である (定理 5.8 (1))．

(2), (3) の証明も同様である．　（終）

補題 6.10　(1)　対 $(X,\ A)$ に関する完全系列 $\cdots \xrightarrow{\delta^*} \xrightarrow{j^*} \xrightarrow{i^*} \cdots$，mod p reduction $\rho_p : H^n(X) \to H^n(X;\ \boldsymbol{Z}_p)$ と Bockstein 準同型 $\beta_p : H^n(X,\ A;\ \boldsymbol{Z}_p) \to H^{n+1}(X,\ A;\ \boldsymbol{Z}_p)$ を考える．$\rho_p(y) = j^*(x) \in H^n(X,\ A;\ \boldsymbol{Z}_p)$ となる $x \in H^n(X,\ A;\ \boldsymbol{Z}_p)$，$y \in H^n(X)$ に対して，

$$i^*(y) = p \cdot z,\quad \delta^* \rho_p(z) = \rho_p \delta^*(z) = -\beta_p(x)$$

となる $z \in H^n(A)$ が存在する．

(2)　$(E,\ p,\ B)$ をファイバー空間，$x \in H^n(B;\ \boldsymbol{Z}_p)$ と $y \in H^n(E)$ が $p^*(x) = \rho_p(y) \in H^n(E;\ \boldsymbol{Z}_p)$ をみたすならば，$\rho_p(z)$ が転入的な $z \in H^n(F)$ があって

$$i^*(y) = p \cdot z,\quad \tau(\rho_p(z)) = -\beta_p(x)$$

［証明］ (1) コチェイン複体の完全系列 $0\longrightarrow C^*(X,\ A)\xrightarrow{j^\#}C^*(X)\xrightarrow{i^\#}C^*(A)\longrightarrow 0$ を考え，$\bar{x}\in C^n(X,\ A)$，$\bar{y}\in C^n(X)$ をそれぞれ x，y の代表元とすると，仮定から，$j^\#(\bar{x})=\bar{y}-py_1+\delta y_2$，$y_1\in C^n(X)$，$y_2\in C^{n-1}(X)\Longrightarrow 0=i^\#j^\#(\bar{x})=i^\#\bar{y}-pi^\#y_1+\delta i^\#y_2$．$\delta\bar{y}=0$ より $0=p\cdot\delta(i^\#y_1)\Longrightarrow\delta(i^\#y_1)=0$．よって，$i^\#y_1$ の類を $z\in H^n(A)$ とすれば，$i^*(y)=p\cdot z$．一方，$\delta^*(z)$ は $j^\#\bar{z}=\delta y_1$ をみたす $\bar{z}\in C^{n+1}(X,\ A)$ で表わされる．また $\beta_p(x)$ は $\delta\bar{x}=p\bar{w}$ となる $\bar{w}\in C^{n+1}(X,\ A)$ で表わされる．$j^\#(p\bar{w})=j^\#\delta\bar{x}=\delta j^\#\bar{x}=\delta\bar{y}-p\delta y_1=-j^\#(p\bar{z})$．$j^\#$：単射で $C^*(X,\ A)$ は torsion がないから，$j^\#(p\bar{w})=-j^\#(p\bar{z})\Longrightarrow\bar{w}=-\bar{z}$．即ち，$\delta^*\rho_p(z)=\rho_p\delta^*(z)=-\beta_p(x)$．

(2) 次の可換な図式を考えると，等式 $\rho_p(p_0{}^*y)=j^*(p^*x)$ をうる．

$$\begin{array}{ccccc} H^{*-1}(F;\ \boldsymbol{Z}_p) & \xrightarrow{\delta^*} & H^*(E,\ F;\ \boldsymbol{Z}_p) & \xrightarrow{j^*} & H^*(E;\ \boldsymbol{Z}_p)\xrightarrow{i^*} \\ & \overset{\tau}{\searrow} & \uparrow p^* & \underset{p_0{}^*}{\nearrow} & \\ & & H^*(B;\ \boldsymbol{Z}_p) & & \end{array}$$

これに(1)を適用すれば，$z\in H^n(F)$ で $i^*(y)=p\cdot z$，$\delta^*(\rho_p z)=-\beta_p(p^*x)=\rho^*(-\beta_p(x))\Longleftrightarrow\tau(\rho_p z)=-\beta_p(x)$，となるものがえられる．　　　　(終)

定理 6.11 $\iota^*: H^*(BU(n))\to H^*(SO(2n)/U(n))$ について，$\iota^*(c_i)=2e_{2i}$ をみたす $e_{2i}\in H^{2i}(SO(2n)/U(n))$ が存在して，$e_{2i}=0$ $(i\geq n)$，

$$\begin{aligned} H^*(SO(2n)/U(n)) &= \boldsymbol{Z}[e_2,\ e_4,\ \cdots,\ e_{2n-2}]/(e_{4k}+\sum_{i=1}^{2k-1}(-1)^i e_{2i}e_{4k-2i}) \\ &= \Delta(e_2,\ e_4,\ \cdots,\ e_{2n-2})\quad (\text{自由加群}) \end{aligned}$$

［証明］ 定理 6.9 の証明と同じ理由で $i^*: H^*(SO(2n)/T^n)\to H^*(U(n)/T^n)$ は全射．定理 4.4 により，$p^*: H^*(SO(2n)/U(n))\to H^*(SO(2n)/T^n)$ は単射．定理 4.9 を使えば，$H^*(SO(2n)/U(n))$ は自由で奇数次数の元は 0.

$\boldsymbol{k}$ を標数 $\neq 2$ の体とする．定理 6.9 の証明で，定理 5.8(1)の代わりに補題 5.15(2)および定理 5.17(1)を使えば

$$\begin{aligned} H^*(SO(2n)/U(n);\ \boldsymbol{k}) &\cong \boldsymbol{k}[c_1,\ \cdots,\ c_n]/(\sum_{i+j=2k}(-1)^i c_i c_j\ \ (k\geq 1),\ c_n) \\ &\cong \boldsymbol{k}[c_1,\ \cdots,\ c_{n-1}]/(\sum_{i+j=2k}(-1)^i c_i c_j;\ k\geq 1) \end{aligned}$$

をうる．これは，$H^*(SO(2n)/U(n))$ を ι^*c_1，$\cdots$，ι^*c_{n-1} で生成される部分環でわれば 2-torsion であることを表わしている．

次に $\boldsymbol{k}=\boldsymbol{Z}_2$ の場合を考える．$\iota^*\circ\rho_r{}^*=0: H^*(BSO(2n);\ \boldsymbol{Z}_2)\to H^*(BU(n);$

$\boldsymbol{Z}_2)\to H^*(SO(2n)/U(n);\ \boldsymbol{Z}_2)$ と $\rho_r{}^*(w_{2i})=c_i$ (定理 5.11(2)) より $\iota^*(c_i)=0$. 整係数では，これは $\iota^*(c_i)=2e_{2i}$ となる $e_{2i}\in H^{2i}(SO(2n)/U(n))$ の存在を示している．ここで，補題 6.10(2)を使えば $e_{2i}\in H^{2i}(SO(2n)/U(n);\ \boldsymbol{Z}_2)$ に対して，$\tau(e_{2i})=\beta_2(w_{2i})=Sq^1w_{2i}=w_{2i+1}$ (Wu の公式). (6.4.1), (6.4.2)を使えば $U(n)\xrightarrow{i} SO(2n)\xrightarrow{p} SO(2n)/U(n)$ から誘導される $(i=r)$

$$H^*(SO(2n)/U(n);\ \boldsymbol{Z}_2)\xrightarrow{p^*}\Delta(e_1,\ e_2,\ \cdots,\ e_{2n-1})\xrightarrow{i^*}\Lambda(e_1,\ e_3,\ \cdots,\ e_{2n-1})$$

において，$i^*(e_{2i-1})=i^*(\sigma(w_{2i}))=\sigma(c_i)=e_{2i-1}$ および $p^*(e_{2i})=\sigma(w_{2i+1})=e_{2i}$.

従って，$H^*(SO(2n)/U(n);\ \boldsymbol{Z}_2)=\Delta(e_2,\ e_4,\ \cdots,\ e_{2n-2})$ をうる (定理 4.2).

以上で，$e_{2i}=(1/2)\,\iota^*(c_i)$ は $H^*(SO(2n)/U(n))$ を乗法的に生成していることがわかった．

$H^*(SO(2n)/U(n))$ は torsion をもたないから，$0=\sum_{i+j=2k}(-1)^ic_ic_j=2c_{2k}+\sum_{i=1}^{2k-1}(-1)^ic_ic_{2k-i}=4(e_{4k}+\sum_{i=1}^{2k-1}(-1)^ie_{2i}e_{4k-2i})\Longrightarrow e_{4k}+\sum_{i=1}^{2k-1}(-1)^ie_{2i}e_{4k-2i}=0$. この式は $e_{2i}{}^2$ を書き直す式を与え，$H^*(SO(2n)/U(n))=\Delta(e_2,\ e_4,\ \cdots,\ e_{2n-2})$ を示し，関係式はこれで十分であることもわかる．　(終)

第4章　KF-群とホモトピー群の周期性

本章では，古典群と等質空間の上のホモトピー論を述べる．特に，いわゆるBottの周期性の証明をMorseの理論(第6章)を使うことなく(コ)ホモロジー論を主要手段として証明することに主眼をおいている．§1はホモトピー論の復習にあてる．Serreの$\mathscr{C}$-理論およびそれのホモトピー論への応用には留意してほしい．§2でH-空間のホモロジー環，Hopf代数について述べるが，これについては第7章でも記述するので，ここでは§3で必要な事実にとどめる．対称空間のある種の極限空間としての無限次元対称空間を§3で定義し，その(コ)ホモロジー環を決定する．体$\boldsymbol{F}$上のベクトル空間の一般化であるベクトルバンドルのつくる可換半群からGrothendieckの方法によりKF-群を§4で定義し，基本的性質について述べる．以上の準備の下にKF-群の周期性定理を§5で証明する．§6では古典群，等質空間の若干のホモトピー群を求めるが，あまり高度な結果を用いるものは省略する．

§1　ホモトピー論の基礎概念

ホモトピー群とホモロジー群

対(X, A)のホモトピー群$\pi_n(X, A)$の定義は第2章，§3に，(整係数)ホモロジー群$H_n(X, A)$の定義は第3章に与えられている．これらの間には，

Hurewiczの準同型

$$\Xi : \pi_n(X, A) \longrightarrow H_n(X, A)$$

が，次のように定義される．$H_n(I^n, \partial I^n) \cong \boldsymbol{Z}$の生成元$\iota_n$を1つ固定して考え，$[f] \in [I^n, \partial I^n, J^{n-1};\ X, A, x_0] = \pi_n(X, A)$に対して

$$\Xi[f] = f_*(\iota_n) \in H_n(X, A) \qquad (f_* : H_n(I^n, \partial I_n) \longrightarrow H_n(X, A))$$

とおく．$[f]=[g] \Longrightarrow f\simeq g \Longrightarrow f_*=g_*$ であるから，Ξ は well-defined である．$n\geq 2$ または $n=1$, $A=x_0$ のとき，Ξ が準同型であることは，ホモロジー群の性質を用いて証明できる．

いま，(X, A) が k-連結 $(\Longleftrightarrow \pi_0(A)=\pi_i(X, A)=0\ (0\leq i\leq k))$ とする．

$C_n(X, A, k)=(\{u:(I^n, I^n$ の k-切片$)\to(X, A)\}$ で生成される $C_n(X)$ の部分群) と定義する．(X, A) の k-連結性を使えば，任意の $u: I^n\to X$ に対して，ホモトピー $u_t: I^n\to X$ で $u_0=u$, $u_1\in C_n(X, A, k)$ となるものを作れる．この u_t は，$u\in C_n(X, A, k) \Longrightarrow u_t=u$ および $(\partial_i^\varepsilon u)_t=\partial_i^\varepsilon(u_t)$ をみたすように n に関して帰納的に構成され，1つのチェインホモトピーを与える．$\eta(u)=u_1$ とおくことによって次が示される．

(1.1)　(X, A) が k-連結ならば，射入 $i: C_*(X, A, k)\to C_*(X)$ はチェイン同値である．即ち，チェイン写像 $\eta: C_*(X)\to C_*(X, A, k)$ について，$\eta\circ i=1$ かつ $i\circ\eta\simeq 1$．従って，$C_*(X, A, k)/C_*(A)\to C_*(X)/C_*(A)$ もチェイン同値である．

明らかに，$C_n(X, A, k)/C_n(A)=0\ (n\leq k)$ であるから，次がえられる．

(1.2)　(X, A) が k-連結であれば，任意の係数群 G について，

$$H_n(X, A; G)=H^n(X, A; G)=0 \quad (n\leq k)$$

$n=k+1$, $G=\boldsymbol{Z}$ のときの関係を示すのが次の **Hurewicz の定理**である．

定理 1.3　(X, A) は k-連結とする．

(1)　$\Xi: \pi_{k+1}(X, A)\to H_{k+1}(X, A)$ は全射である．

(2)　(X, A) が $(k+1)$-単純かつ $k\geq 1$ ならば，$\Xi: \pi_{k+1}(X, A)\to H_{k+1}(X, A)$ は同型対応である．

(3)　X が弧状連結のとき，$\Xi: \pi_1(X)\to H_1(X)$ は全射でその核は $\mathrm{Ker}\,\Xi=[\pi_1(X), \pi_1(X)]$ (交換子群)，即ち，$H_1(X)$ は $\pi_1(X)$ のアーベル化である．

この定理の証明は略するが，(1), (3) の証明は比較的容易である．(2) については，ホモトピー加法定理を使って直接示すことができるが，(3) を基礎としホモロジースペクトル系列の応用として，$\pi_1(A)=0$ の場合には後に示す一般な mod $\mathcal{C}$ の形で証明される．

X, Y は弧状連結とし，$f: X\to Y$ に関する次の2条件を考える：

$(1.4.1)_k$　$f_*: \pi_i(X) \to \pi_i(Y)$ は $i \leq k$ のとき同型，$i=k+1$ のとき全射，

$(1.4.2)_k$　$f_*: H_i(X) \to H_i(Y)$ は $i \leq k$ のとき同型，$i=k+1$ のとき全射.

定理 1.5 (J.H.C.Whitehead)　上の $f: X \to Y$ について，(α)　$\pi_1(X)=0$, または (β)　X, Y は H-空間かつ f は H-写像(ホモトピーの 意味で積を保つ)をみたすならば，2条件 $(1.4.1)_k$ と $(1.4.2)_k$ は同値である.

［証明］ Y を f の写像柱でおきかえることによって，f は射入としてよい. ホモトピー群，ホモロジー群の完全系列を使えば，

$(1.4.1)_k \Longleftrightarrow (1.5.1)_k: \pi_i(Y, X)=0 \quad (i \leq k+1)$

$(1.4.2)_k \Longleftrightarrow (1.5.2)_k: H_i(Y, X)=0 \quad (i \leq k+1)$

定理 1.3 を使えば，次が帰納的に示される.

$(1.5)'$　(Y, X) が単純ならば，$(1.5.1)_k$ と $(1.5.2)_k$ は同値.

仮定 (α) をみたすときは明らかに (Y, X) は単純で，定理が証明される. (β) をみたすときも，(Y, X) の単純性を証明することができる(詳細略).　(終)

第2章，(6.3) (1) と合わせると，次の系がえられる.

系 1.6　$f: X \to Y$ は定理 1.5 の仮定 (α) または (β) をみたし，さらに X, Y は CW-複体とホモトピー同値であるとする. このとき，次の各条件は同値である：

(1)　f はホモトピー同値写像，

(2)　f は弱ホモトピー同値写像，即ち，$f_*: \pi_i(X) \cong \pi_i(Y)$　($\forall i$),

(3)　$f_*: H_*(X) \cong H_*(Y)$

Serre の $\mathcal{C}$-理論

定義　アーベル群の同型類よりなる集合 $\mathcal{C}$ が (Serre の意味の) **クラス** $\Longleftrightarrow$ 次の公理(Ⅰ)をみたす：

(Ⅰ)　(1)　$\mathcal{C} \neq \phi$,　(2)　$A, B \in \mathcal{C}$, $A \to C \to B$：完全 $\Longrightarrow C \in \mathcal{C}$

この公理(Ⅰ)は次の公理(Ⅰ′)と同値である.

(Ⅰ′)　(1)　$0=\{e\} \in \mathcal{C}$,　(2)　$A \subset B$, $B \in \mathcal{C} \Longrightarrow A \in \mathcal{C}$, $B/A \in \mathcal{C}$

　　　(3)　$A, B \in \mathcal{C}$, $0 \to A \to C \to B \to 0$：完全 $\Longrightarrow C \in \mathcal{C}$

定義　$f: A \to B$ はアーベル群の準同型とするとき，

f は $\mathcal{C}$-**全射** $\Longleftrightarrow \mathrm{Coker}\, f = B/\mathrm{Im}\, f \in \mathcal{C}$,

f は $\mathcal{C}$-**単射**$\Longleftrightarrow \mathrm{Ker}\, f \in \mathcal{C}$,

f は $\mathcal{C}$-**同型**$\Longleftrightarrow f$ は $\mathcal{C}$-全射かつ $\mathcal{C}$-単射.

アーベル群 B_1, B_2 は $\mathcal{C}$-**同型**$\Longleftrightarrow A$ と $\mathcal{C}$-同型 $f_i : A \to B_i$ $(i=1, 2)$ がある.

さらに，次の公理を考える：

(II_A)　$A, B \in \mathcal{C} \Longrightarrow A \otimes B$, $\mathrm{Tor}(A, B) \in \mathcal{C}$

(II_B)　$A \in \mathcal{C} \Longrightarrow$ 任意のアーベル群 B について $A \otimes B \in \mathcal{C}$

(III)　$A \in \mathcal{C} \Longrightarrow H_i(A)$ (群のホモロジー) $\in \mathcal{C}$ $(i>0)$

ここで，群のホモロジー $H_i(A)$ は代数的に定義されるものであるが，これは次に述べる Eilenberg-MacLane 複体 $K(A, 1)$ のホモロジー $H_i(K(A, 1))$ と同型であることが知られている．本書では $H_i(A) = H_i(K(A, 1))$ を定義とする.

定義　G を群，n を正の整数とするとき，X が $(\boldsymbol{G}, \boldsymbol{n})$-**型 Eilenberg-MacLane 空間**$\Longleftrightarrow \pi_i(X)=0$ $(i \neq n)$, $\pi_n(X) \cong G$. 特に，X が CW-複体のときは，$(\boldsymbol{G}, \boldsymbol{n})$-**型 Eilenberg-MacLane 複体**といい，$X = K(G, n)$ で表わす.

$K(G, 0) = G$ とみなすこともある．$n>1$ ならば G はアーベル群でなければならない.

次の定理の証明は省略する.

定理 1.7　G はアーベル群，n は正の整数とする.

(1)　$K(G, n)$ は存在し，任意の (G, n)-型 Eilenberg-MacLane 空間 X に対して弱ホモトピー同値 $K(G, n) \to X$ がある．従って，$K(G, n)$ はホモトピー同値の意味で一意的である.

(2)　$K(G, n)$ は $\Omega(K(G, n+1))$ とホモトピー同値．従って，$K(G, n)$ はホモトピー可換 H-空間である.

(3)　$u_n \in H^n(K(G, n); G) \cong \mathrm{Hom}(H_n(K(G, n)), G)$ を Hurewicz の同型の逆の準同型 $H_n(K(G, n)) \to \pi_n(K(G, n)) \cong G$ で定まる類(**基本類**という)とする．任意の CW-複体 X について，対応 $\{f\} \to f^*(u_n)$ は同型対応 $[X, K(G, n)]_0 \cong H^n(X; G)$ を与える.

(4)　$(n, G, n+q, H)$-型コホモロジー作用素 Φ の集合と $H^{n+q}(K(G, n); H)$ とは $\Phi \to \Phi(u_n)$ によって1対1対応にある.

記号　$\mathcal{F}$：有限生成アーベル群のクラス.

$\mathcal{O}$：$\{e\}$のみよりなるクラス．

$\mathcal{C}_0$：有限アーベル群のクラス．

$\mathcal{C}_p$：p-成分(pは素数)がない有限アーベル群のクラス．

$\mathcal{T}_0$：すべての元の位数が有限であるアーベル群(torsion 群)のクラス．

$\mathcal{T}_p$：すべての元の位数が有限かつ p と素であるアーベル群のクラス．

(1.8)　(1)　$\mathcal{F}$, $\mathcal{O}$, $\mathcal{C}_0$, $\mathcal{C}_p$, $\mathcal{T}_0$, $\mathcal{T}_p$ は(II_A), (III)をみたす．

(2)　$\mathcal{F}$, $\mathcal{O}$, $\mathcal{T}_0$, $\mathcal{T}_p$ は(II_B)をみたす．

(3)　$\mathcal{F}\cap\mathcal{T}_0=\mathcal{C}_0$,　$\mathcal{F}\cap\mathcal{T}_p=\mathcal{C}_p$,　$\cap\mathcal{T}_p=\cap\mathcal{C}_p=\mathcal{O}$

$\mathcal{O}$-全射，$\mathcal{O}$-単射等は通常の全射，単射等であることに注意せよ．

定理 1.9　ファイバー空間 (E, p, B) において，Fは0-連結，局所係数群 $\underline{H_*(F)}$ は自明であり，$B_0\subset B$, $E_0=p^{-1}(B_0)$ とする．

(1)　$\mathcal{C}$は(II_A)をみたすクラスとする．$H_i(B, B_0)=0$ $(i=0,1)$,　$H_i(B, B_0)\in\mathcal{C}$ $(i<n)$,　$H_j(F)\in\mathcal{C}$ $(0<j<m)\Longrightarrow p_*: H_k(E, E_0)\to H_k(B, B_0)$ は $k\leq\mathrm{Min}(n, m+1)$ のとき $\mathcal{C}$-同型，$k=\mathrm{Min}(n, m+1)+1$ のとき $\mathcal{C}$-全射である．

(2)　$\mathcal{C}$は(II_B)をみたすクラスとする．$H_i(B, B_0)\in\mathcal{C}$ $(0\leq i<n)$, $H_j(F)\in\mathcal{C}$ $(0<j<m)\Longrightarrow p_*: H_k(E, E_0)\to H_k(B, B_0)$ は $k\leq m+n-1$ のとき $\mathcal{C}$-同型，$k=m+n$ のとき $\mathcal{C}$-全射である．

［証明］　ホモロジースペクトル系列

$$E^2=H_*(B, B_0;\ \underline{H_*(F)})\Longrightarrow H_*(E, E_0)$$

において，$E^2_{i,j}=H_i(B, B_0)\otimes H_j(F)\oplus\mathrm{Tor}(H_{i-1}(B, B_0),\ H_j(F))$．(1)の場合に $s=\mathrm{Min}(n, m+1)$，(2)の場合に $s=m+n-1$ とおけば，仮定から $i\neq 0$, $i+j\leq s\Longrightarrow E^2_{i,j}\in\mathcal{C}\Longrightarrow E^r_{i,j}\in\mathcal{C}$ がえられる．従って，$k\leq s+1\Longrightarrow d^r(E^r_{k,0})\subset E^r_{k-r,r-1}\in\mathcal{C}\Longrightarrow E^{r+1}_{k,0}\hookrightarrow E^r_{k,0}$ は $\mathcal{C}$-同型$\Longrightarrow E^\infty_{k,0}=H_*(E, E_0)/D_{k-1,1}\hookrightarrow E^2_{k,0}=H_k(B, B_0)$ は $\mathcal{C}$-同型．$k\leq s\Longrightarrow E^\infty_{k-j,j}\in\mathcal{C}\Longrightarrow D_{k-1,1}\in\mathcal{C}$．よって定理をうる．　(終)

系 1.10　$\mathcal{C}$は(II_A)をみたすクラスとする．

(1)　Xは1-連結，$H_i(X)\in\mathcal{C}$ $(0<i<n,\ m>1)\Longrightarrow H_i(\Omega X)\in\mathcal{C}$ $(0<i<m-1)$ かつホモロジー懸垂 $\sum: H_{m-1}(\Omega X)\to H_m(X)$ は $\mathcal{C}$-同型．

(2)　$\mathcal{C}$が(III)もみたせば，$A\in\mathcal{C}\Longrightarrow H_i(K(A, n))\in\mathcal{C}$ $(i>0)$．

［証明］　(1)は m に関する帰納法により，定理 1.9(1)をファイバー空間 $\Omega X\to PX\to X$ に適用してえられる．(2)は n に関する帰納法により(1)と定理 1.7

(2)よりえられる.　(終)

$\mathscr{C}$-理論のホモトピー群への応用

定理 1.11　(**mod $\mathscr{C}$ Hurewicz の定理**)

(1)　$\mathscr{C}$は(II$_A$), (III)をみたすクラス, Xは1-連結とする.

$H_i(X)\in\mathscr{C}$ $(0<i<n)\Longrightarrow\Xi:\pi_i(X)\longrightarrow H_i(X)$ は $i\leq n$ のとき $\mathscr{C}$-同型.

(2)　$\mathscr{C}$は(II$_B$), (III)をみたすクラス, $A\subset X$, Aは1-連結, (X, A)は2-連結とする. $H_i(X, A)\in\mathscr{C}$ $(i<n)\Longrightarrow\Xi:\pi_i(X, A)\to H_i(X, A)$ は $i\leq n$ のとき $\mathscr{C}$-同型.

[証明]　(2)を先に考える. ファイバー空間 $\Omega X\to PX\to X$ において, $\Omega(X, A)$ は1-連結, Xは1-連結$\Longrightarrow\Omega X$は0-連結. 定理1.9(2)によって, $p_*:H_k(PX, \Omega(X, A))\to H_k(X, A)$ は $k\leq n$ のとき $\mathscr{C}$-同型. 図式

$$\begin{array}{ccccc}\pi_i(X, A) & \xleftarrow[\cong]{p_*} & \pi_i(PX, \Omega(X, A)) & \xrightarrow[\cong]{\partial_*} & \pi_{i-1}(\Omega(X, A))\\ \downarrow\Xi & & \downarrow\Xi & & \downarrow\Xi\\ H_i(X, A) & \xleftarrow{p_*} & H_i(PX, \Omega(X, A)) & \xrightarrow[\cong]{\partial_*} & H_{i-1}(\Omega(X, A))\end{array}$$

の可換性によって, (2)は(1)に帰着されることがわかる.

(1)　系1.10 (1)により $H_i(\Omega X)\in\mathscr{C}$ $(0<i<n-1)$ であるから, 定理1.9(1)により $p_*:H_i(PX, \Omega X)\to H_i(X, x_0)$ は $i\leq n$ で全単射. $n=2$ の場合には(1)は通常の Hurewicz 同型 $\pi_1(\Omega X)\cong H_1(\Omega X)$. $n>2$ かつ X が2-連結のときには(1)は1次数低い場合に帰着される. よって, $n>2$ の場合には X が2-連結の場合におきかえられることを示せばよい. X に胞体 e_α^m $(m=4, 5, \cdots)$ を順次接着して3次元以上のホモトピー群を消すことにより, Xを含む $(\pi_2(X), 2)$-型 Eilenberg-MacLane 空間 X^* を作る. $\pi_2(X)\cong H_2(X)\in\mathscr{C}\Longrightarrow H_i(X^*)\in\mathscr{C}$ $(i>0)$ $\Longrightarrow H_i(\Omega X^*)\in\mathscr{C}$ $(i>0)$. ファイバー空間 $\Omega X^*\to\Omega(X^*, X)\xrightarrow{p_1}X$ に定理1.9(1)を適用して, $p_{1*}:H_i(\Omega(X^*, X))\to H_i(X)$ は $i\leq n$ で $\mathscr{C}$-同型. $\Omega(X^*, X)$ は2-連結であることから, X が2-連結の場合に帰着できることがわかる.　(終)

定理 1.12　(**mod $\mathscr{C}$ J.H.C. Whitehead の定理**)　$f:X\to Y$を1-連結空間の間の写像(で$f_*:\pi_2(X)\to\pi_2(Y)$ は全射)とする.

(1)　$\mathscr{C}$は(II$_B$), (III)をみたすクラスとするとき, 次の条件(a), (b)は同値:

(a)　$f_*: \pi_i(X) \longrightarrow \pi_i(Y)$ は $i \leq n$ で $\mathscr{C}$-同型，$i=n+1$ で $\mathscr{C}$-全射，

(b)　$f_*: H_i(X) \longrightarrow H_i(Y)$ は $i \leq n$ で $\mathscr{C}$-同型，$i=n+1$ で $\mathscr{C}$-全射.

(2)　X, Y は有限型，$\mathscr{C}=\mathscr{C}_p$ とする．(a), (b および次の (c), (c)* は同値：

(c)　$f_*: H_i(X;\ \boldsymbol{Z}_p) \longrightarrow H_i(Y;\ \boldsymbol{Z}_p)$ は $i \leq n$ で同型，$i=n+1$ で全射，

(c)*　$f^*: H^i(Y;\ \boldsymbol{Z}_p) \longrightarrow H^i(X;\ \boldsymbol{Z}_p)$ は $i \leq n$ で同型，$i=n+1$ で単射.

ここで，$\mathscr{C}=\mathscr{C}_0$ の場合にも $\boldsymbol{Z}_p$ を $\boldsymbol{Q}$ でおきかえて成り立つ.

［証明］ 定理 1.5 の証明と同様に f を射入でおきかえてよい．そのとき，(a), (b), (c), (c)* はそれぞれ $\pi_i(Y,\ X) \in \mathscr{C}$，$H_i(Y,\ X) \in \mathscr{C}$，$H_i(Y,\ X;\ \boldsymbol{Z}_p)=0$，$H^i(Y,\ X;\ \boldsymbol{Z}_p)=0$ $(i \leq n+1)$ と同値．従って (1) は定理 1.11 (2) より，(2) は普遍係数定理よりでる．($f_*|\pi_2$ が全射でなくても定理は成り立つ．)　(終)

定理 1.13　(**mod $\mathscr{C}$ Blakers-Massey の定理**)　$\mathscr{C}$ は (II_B), (III) をみたすクラス，X は CW-複体，A, B は X の部分複体，$x_0 \in A \cap B$, $A \cap B$ は 1-連結，A, $A \cup B$ は 2-連結，m, $n \geq 2$ とする．このとき，$H_i(A,\ A \cap B) \in \mathscr{C}$ $(i \leq m)$，$H_j(B, A \cap B) \in \mathscr{C}$ $(j \leq n)$ であれば，切除準同型

$$i_*: \pi_k(A,\ A \cap B) \longrightarrow \pi_k(A \cup B,\ B)$$

は $k<m+n$ のとき $\mathscr{C}$-同型，$k=m+n$ のとき $\mathscr{C}$-全射である.

［証明］ 射入 $i: (A,\ A \cap B) \to (A \cup B,\ B)$ はファイバー写像 $f: (PA,\ p,\ A) \to (P(A \cup B),\ p,\ A \cup B)$ を誘導し，f は次のようなスペクトル系列の間の準同型 $f^r: E^r_{i,j} \to {}'E^r_{i,j}$ を誘導する：

$$f^2_{i,j}: E^2_{i,j}=H_i(A,\ A \cap B;\ H_j(\Omega A)) \longrightarrow {}'E^2_{i,j}=H_i(A \cup B, B;\ H_j(\Omega(A \cup B)))$$

ここで，$f^2_{i,j}$ は切除同型 $i_*: H_i(A,\ A \cap B) \cong H_i(A \cup B,\ B)$ と係数群の準同型 $\Omega i_*: H_j(\Omega A) \to H_j(\Omega(A \cup B))$ から誘導される．$H_j(A \cup B, B) \cong H_j(B,\ A \cap B) \in \mathscr{C}$ $(j \leq n) \Longrightarrow \pi_j(A \cup B,\ \ B) \in \mathscr{C}$ $(j \leq n) \Longrightarrow \pi_j(\Omega(A \cup B),\ \Omega B) \in \mathscr{C}$ $(j<n) \Longrightarrow H_j(\Omega(A \cup B), \Omega B) \in \mathscr{C}$ $(j<n) \Longrightarrow \Omega i_*$ は $j<n-1$ で $\mathscr{C}$-同型，$j=n-1$ で $\mathscr{C}$-単射. $H_i(A,\ A \cap B)$, $H_i(A \cup B,\ B) \in \mathscr{C}$ $(i<m+1)$ であるから，普遍係数定理を使って $f^2_{i,j}$ は $i+j<m+n$ のとき $\mathscr{C}$-同型，$i+j=m+n$ のとき $\mathscr{C}$-全射であることがわかる．スペクトル系列の簡単な考察により，このことは各 f^r で成り立ち，極限においても

$$f_*: H_k(PA,\ \Omega(A,\ A \cap B)) \longrightarrow H_k(P(A \cup B),\ \Omega(A \cup B,\ B))$$

は $k<m+n$ で $\mathscr{C}$-同型，$k=m+n$ で $\mathscr{C}$-全射．PA, $P(A \cup B)$ は可縮であるか

ら，$\Omega i_*: H_{k-1}(\Omega(A, A\cap B))\to H_{k-1}(\Omega(A\cup B, B))$ でもこれは成り立ち，定理1.12により，H_{k-1} を π_{k-1} におきかえても成り立つ．従って，同型 $\pi_k(A, A\cap B)\cong\pi_{k-1}(\Omega(A, A\cap B))$ 等を使って，定理が証明される．　(終)

系 1.14　(**mod** $\mathscr{C}$ **Freudenthal の定理**)　$\mathscr{C}$ は (II$_B$), (III) をみたすクラス，X は 1-連結 CW-複体，$H_i(X)\in\mathscr{C}$ $(i\leq n)$ とするとき，懸垂準同型

$$S: \pi_k(X)\longrightarrow\pi_{k+1}(SX)$$

は $k\leq 2n$ で $\mathscr{C}$-同型，$k=2n+1$ で $\mathscr{C}$-全射．

［証明］　定理 1.13 で $A(B)$ を SX の上(下)半部分とすればよい．　(終)

注意 1.15　定理 1.13，系 1.14 で複体が有限型ならば (II$_B$) を (II$_A$) でおきかえてよい．

一般ホモトピー群

各位相空間 X にはその 1 点 x_0 が指定されているとし，この点 x_0 を X の**基点**という．(連続)写像やホモトピーは基点を保つものばかり考えて，そのホモトピー類の集合を

$$[X, Y]_0=[X, x_0; Y, y_0]=\{[f]: (X, x_0)\longrightarrow(Y, y_0)\ (\text{ホモトピー類})\}$$

と書くことにする(第 2 章，§3 参照)．

等化写像 $\psi: I^n\longrightarrow I^n/\partial I^n\cong S^n$ を用いると，全単射

$$\psi^*: [S^n, Y]_0\cong\pi_n(Y, y_0)=[I^n, \partial I^n; Y, y_0]$$

がえられる．従って，$[X, Y]_0$ は $\pi_n(Y, y_0)$ の一般化とみられるが，それに自然な群構造が導入できるためには，2 通りの場合がある．

定義　X, Y は基点 x_0, y_0 をもつ位相空間とするとき，$X\times Y$ の部分空間

$$X\vee Y=X\times y_0\cup x_0\times Y$$

を X と Y の **1 点和**といい，商空間

$$X\wedge Y=(X\times Y)/(X\vee Y)$$

を X と Y の **smash 積**という．

特に，$I=[0, 1]$ の基点を $\{1\}$ にとるとき，

$$CX=X\wedge I\cong(X\times I)/(x_0\times I\cup X\times 1)$$

を X の上の**約錐**，S^1 の基点を $\boldsymbol{e}_1=(1, 0)$ にとるとき，

$$SX=X\wedge S^1\cong(X\times I)/(x_0\times I\cup X\times\partial I)$$

を X の**約懸垂**という(約錐，約懸垂を単に**錐**，**懸垂**ということもある).

$f:(X, x_0)\longrightarrow(X', x_0')$, $g:(Y, y_0)\longrightarrow(Y', y_0')$ の積写像 $f\times g: X\times Y \longrightarrow X'\times Y'$ は $X\vee Y$ を $X'\vee Y'$ に写すから，写像の **smash 積**

$$f\wedge g: X\wedge Y\longrightarrow X'\wedge Y'$$

を誘導する．約錐，約懸垂においても，I, S^1 の恒等写像を g にとって，写像の**約錐，約懸垂**

$$Cf=f\wedge 1_I: CX\longrightarrow CX', \quad Sf=f\wedge 1_{S^1}: SX\longrightarrow SX'$$

がえられる.

smash 積 $X\wedge Y$ を考える場合には，X, Y は Hausdorff 空間，そのどちらかはコンパクトと仮定するのが便利であり，かつ実用的である．このような場合には，自然な同相 $(X\wedge Y)\wedge Z\cong X\wedge(Y\wedge Z)$ がえられ，従って，これで同一視するとき，写像の smash 積の結合性 $(f\wedge g)\wedge h=f\wedge(g\wedge h)$ がえられる．ここで，基礎になっているのは次の補題である.

補題 1.16 $f: X\to Y$, $f': X'\to Y'$ はともに等化写像とする．f が次の条件のいずれかをみたすとき，$f\times f': X\times X'\to Y\times Y'$ は等化写像である.

(i) $X=Y$ は局所コンパクト Hausdorff 空間，かつ $f=1_X$,

(ii) X はコンパクト，Y は Hausdorff 空間.

H-空間の双対的な概念として co-H-空間がある.

定義 基点 x_0 をもつ X が **co-*H*-空間**$\Longleftrightarrow$次の性質をもつ **co-積** $\phi:(X, x_0)\to(X\vee X, (x_0, x_0))$ がある：射入 i_1, $i_2: X\to X\vee X$ ($\Longleftrightarrow i_1(x)=(x, x_0)$, $i_2(x)=(x_0, x)$) について，$\phi\circ i_1\simeq 1_X\simeq\phi\circ i_2:(X, x_0)\to(X, x_0)$.

co-積 ϕ は**ホモトピー結合的**$\Longleftrightarrow(\phi\vee 1_X)\circ\phi\simeq(1_X\vee\phi)\circ\phi$.

co-積 ϕ は**ホモトピー可換**$\Longleftrightarrow T\circ\phi\simeq\phi$ ($T(x, y)=(y, x)\in X\vee X$).

X が co-H-空間のとき，f, $g:(X, x_0)\to(Y, y_0)$ の積 $f*g$ を

$$f*g:(X, x_0)\longrightarrow(Y, y_0)\Longleftrightarrow(f*g)(x)=\begin{cases} f(x') & (\phi(x)=(x', x_0) \text{ のとき}) \\ g(x'') & (\phi(x)=(x_0, x'') \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定義する．この積はホモトピー類の間の積を誘導する.

Y が積 $\mu:(Y\times Y, (y_0, y_0))\to(Y, y_0)$ をもつ H-空間のとき，$f, g:(X, x_0)\to(Y, y_0)$ の積 $f\cdot g$ を

$$f\cdot g:(X,\ x_0)\longrightarrow(Y,\ y_0)\Longleftrightarrow(f\cdot g)(x)=\mu(f(x),\ g(x))$$

で定義する．この積はホモトピー類の間の積を誘導する．

写像 $f:(X,\ x_0)\longrightarrow(Y,\ y_0)$ と $g:(Y,\ y_0)\longrightarrow(Z,\ z_0)$ の合成

$$g\circ f:(X,\ x_0)\longrightarrow(Z,\ z_0)$$

は，ホモトピー類の間の合成 $[g]\circ[f]=[g\circ f]\in[X,\ Z]_0$ を誘導する．

$$g_*:[X,\ Y]_0\longrightarrow[X,\ Z]_0\Longleftrightarrow g_*[f]=[g\circ f]$$

$$f^*:[Y,\ Z]_0\longrightarrow[X,\ Z]_0\Longleftrightarrow f^*[g]=[g\circ f]$$

とおくと，写像の合成の結合性より，次の等式がえられる：

$$(g\circ g')_*=g_*\circ g'_*,\quad (f\circ f')^*=f'^*\circ f^*$$

また，定値写像 $X\rightarrow y_0$ の類を $0\in[X,\ Y]_0$ とおくとき，明らかに

$$g_*(0)=0,\qquad f^*(0)=0$$

定理 1.17　(1)　X が co-H-空間のとき，$[X,\ Y]_0$ における積 $*$ は，

$\alpha*0=0*\alpha=\alpha,$

$g_*(\alpha*\beta)=g_*(\alpha)*g_*(\beta)\qquad (g:(Y,\ y_0)\longrightarrow(Y',\ y_0'))$

をみたす．逆に，任意の Y について，$[X,\ Y]_0$ がこのような積 $*$ をもてば，この積を与える X の co-H-空間としての積がホモトピーの意味で一意的にある．

(2)　Y が H-空間のとき，$[X,\ Y]_0$ における積は

$\alpha\cdot 0=0\cdot\alpha=\alpha,$

$f^*(\alpha\cdot\beta)=f^*(\alpha)\cdot f^*(\beta)\qquad (f:(X',x_0')\longrightarrow(X,\ x_0))$

をみたす．逆に，任意の X について，$[X,\ Y]_0$ がこのような積・をもてば，この積を与える Y の H-空間としての積がホモトピーの意味で一意的にある．

(3)　X が co-H-空間かつ Y が H-空間のとき，$[X,\ Y]_0$ における (1)，(2) の積は一致して，その積は可換 $(\alpha\beta=\beta\alpha)$ である．

(4)　co-H-空間 X における co-積がホモトピー結合的（またはホモトピー可換）$\Longleftrightarrow[X,\ Y]_0$ における積は結合的（または可換）である．H-空間 Y についても同様である．

（証明略）

定義　co-H-空間 X は**ホモトピー逆元的**$\Longleftrightarrow\iota:(X,\ x_0)\rightarrow(X,\ x_0)$ があって，

$$\iota*1_X\simeq 0\simeq 1_X*\iota.$$

co-*H*-群$\Longleftrightarrow$ホモトピー結合的，ホモトピー逆元的 co-H-空間

H-空間 Y は**ホモトピー逆元的**$\Longleftrightarrow \iota : (Y,\ y_0) \to (Y,\ y_0)$ があって，

$$\iota \cdot 1_Y \simeq 0 \simeq 1_Y \cdot \iota.$$

***H*-群**$\Longleftrightarrow$ホモトピー結合的，ホモトピー逆元的 H-空間

定理 1.18　X は co-H-空間(または Y は H-空間)とする．

X(または Y)はホモトピー逆元的$\Longleftrightarrow [X,\ Y]_0$ の各元は逆元をもつ．

系 1.19　X が co-H-群または Y が H-群$\Longrightarrow [X,\ Y]_0$ は群．

X が co-H-群かつ Y が H-群$\Longrightarrow [X, Y]_0$ は可換群．

約懸垂は co-H-空間の典型的な例である． $S^1 = I/\partial I$ と考え， 等化写像 ψ : $I \to S^1$ を用いて，等化写像

$$d_X : X \times I \longrightarrow SX \ (\Longleftrightarrow d_X(x,\ t) = (x,\ \psi(t)) \text{ の類} \in X \wedge S^1)$$

を考える．d_X は $X \times \partial I \cup x_0 \times I$ を1点に縮める写像である．

$$\phi : SX \longrightarrow SX \vee SX \Longleftrightarrow \phi(d_X(x,\ t)) = \begin{cases} d_X(x,\ 2t) & (0 \leq t \leq 1/2) \\ d_X(x,\ 2t-1) & (1/2 \leq t \leq 1) \end{cases}$$

と定義すると，SX は co-H-空間となる．

(**1.20**)　SX は co-H-群である． 従って， $[SX,\ Y]_0$ は群である． ここで，X が co-H-空間であれば，SX はホモトピー可換的．特に，$[S(SX), Y]_0$ は可換群である．

$S(SX) = (X \wedge S^1) \wedge S^1 = X \wedge (S^1 \wedge S^1)$ において，$S^1 \wedge S^1 = S^2$ と考えられるから，$S^2X = X \wedge S^2 = S(SX)$ と考えてよい．一般に，

$$S^nX = X \wedge S^n, \qquad S^nf = f \wedge 1_{S^n} : S^nX \longrightarrow S^nY$$

とおく，$S^{n+1}X = S(S^nX)$，$S^{n+1}f = S(S^nf)$ である．

H-空間の例として， 位相群の外に閉道空間 $\Omega Y = \{w : (I,\ \partial I) \to (Y,\ y_0)\}$ がある．積はもちろん閉道の積で与えられる．

(**1.21**)　ΩY は H-群である．従って， $[X,\ \Omega Y]_0$ は群である． ここで Y が H-空間であれば， ΩY はホモトピー可換的． 特に， $[X,\ \Omega(\Omega Y)]_0$ は可換群である．

$\Omega(\Omega Y)$ は $\Omega^2 Y = \{f : (I^2, \partial I^2) \longrightarrow (Y,\ y_0)\}$ と同一視できる．

定義　$F:(SX,*)\to(Y,y_0)$ と $f:(X,x_0)\to(\Omega Y,w_0)$ は互いに他の**随伴写像** $\Longleftrightarrow F(d_X(x,t))=f(x)(t)$, $x\in X$, $t\in I$.

定理 1.22　随伴写像は1対1に対応し，同型 $[SX,Y]_0\cong[X,\Omega Y]_0$ を誘導する．この同型に関して，下の図は準同型の可換図式である：

$$\begin{array}{ccc} [SX,Y]_0 & \cong & [X,\Omega Y]_0 \\ \downarrow g_* & & \downarrow \Omega g_* \\ [SX,Y']_0 & \cong & [X,\Omega Y']_0 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} [SX',Y]_0 & \cong & [X',\Omega Y]_0 \\ \downarrow Sh^* & & \downarrow h^* \\ [SX,Y]_0 & \cong & [X,\Omega Y]_0 \end{array}$$

補題 1.23　ホモトピー結合的な H-空間 X が CW-複体のホモトピー型をもち，$\pi_0(X)$ が (X の積に関して)群をなすとき X は H-群である．

［証明］　与えられた H-空間 X は連結な CW-複体としてよい．積 $\mu: X\times X\to X$ を用いて，$f: X\times X\to X\times X \Longleftrightarrow f(x,y)=(x,\mu(x,y))$ と定義する．f の誘導するホモトピー群の準同型 f_* は $(\alpha,\beta)\in\pi_i(X)\oplus\pi_i(X)\cong\pi_i(X\times X)$ に $(\alpha,\alpha+\beta)$ を対応させるから同型．系 1.6 により，$g': X\times X\to X\times X$ が存在して $f\circ g'\simeq 1$, $g'\circ f\simeq 1$．$p_1, p_2: X\times X\to X$ を $p_1(x,y)=x$, $p_2(x,y)=y$ で与えられる射影とする．$p_1\circ f=p_1 \Longrightarrow p_1\circ g'=p_1\circ f\circ g'\simeq p_1$．$p_1$ に関する被覆ホモトピー性質により，$p_1\circ g=p_1$, $g\simeq g'$ となる g があり，$g(x,y)=(x,h(x,y))$, $h: X\times X\to X$，とかける．$\iota(x)=h(x,e)$ とおくとき，$\mu(x,\iota(x))=p_2(x,\mu(x,\iota(x)))=p_2fg(x,e) \Longrightarrow \mu\circ(1\times\iota)\circ d=p_2\circ f\circ g\circ i_1\simeq p_2\circ i_1=0$．さらに，$\mu\circ(\iota\times 1)\circ d\simeq\mu\circ((\mu\circ(0\times(\iota\circ d)\times 1)\circ d=\mu\circ(\mu\times 1)\circ(0\times\iota\times 1)\circ(d\times 1)\circ d\simeq\mu\circ(1\times\mu)\circ(0\times\iota\times 1)\circ(1\times d)\circ d=\mu\circ(0\times(\mu\circ(\iota\times 1)\circ d))\circ d=\mu\circ(0\times 0)\circ d=0$．故に X はホモトピー逆元的．　（終）

ホモトピー完全系列

復習　基点をもつ集合の系列 $A\xrightarrow{\varphi}B\xrightarrow{\psi}C$ が**完全**
$\Longleftrightarrow \mathrm{Im}\,\varphi=\mathrm{Ker}\,\psi$, ただし $\mathrm{Ker}\,\psi=\psi^{-1}$(基点)．

$[X,Y]_0$ の基点は定値写像の類(単位元) 0 にとる．

X の部分空間 A を1点に縮める等化写像 $\pi: X\to X/A$ を考える．X/A の基点は $*=A/A$ にとる．等化写像の定義を用いて，次の全単射がえられる：

(1.24)　$\pi^*: [X/A,Y]_0\cong[X,A;Y,y_0]$

定理 1.25　次の系列は完全である：

$$[SY,A]_0\xrightarrow{i_*}[SY,X]_0\xrightarrow{j_*}[CY,Y;X,A]_0\xrightarrow{\partial_*}[Y,A]_0\xrightarrow{i_*}[Y,X]_0$$

ただし，$i: A \subset X$，$j: (X, x_0) \to (X, A)$ は射入，$\partial_*[f]=[f|Y]$ とし，$\pi: CY \to CY/Y = SY$ を用いて，$(\pi^*:)[CY, Y; X, x_0]_0 = [SY, X]_0$ とみなす．

［証明］ 直接証明できる．また，$X' = \mathrm{Map}(Y, X) \subset A' = \mathrm{Map}(Y, A)$ とみると，上の完全系列は完全系列 $\pi_1(A') \to \pi_1(X') \to \pi_1(X', A') \to \pi_0(A') \to \pi_0(X')$ に相当することに注意する．（終）

定理 1.26 (E, p, B) をファイバー空間，$F = p^{-1}(b_0)$，K を CW-複体とするとき，$p_*: [CK, K; E, F]_0 \to [CK, K; B, b_0] \cong [SK, B]_0$ は全単射であり，$\Delta = \partial_* \circ p_*^{-1}$ とするとき次の系列は完全である：

$$[SK, E]_0 \xrightarrow{p_*} [SK, B]_0 \xrightarrow{\Delta} [K, F]_0 \xrightarrow{i_*} [K, E]_0 \xrightarrow{p_*} [K, B]_0$$

［証明］ ファイバー空間は CW-複体に関してホモトピー被覆性質をもつことを使って，第2章の定理 3.10，系 3.11 と同様に証明される．（終）

写像 $f: (X, x_0) \to (Y, y_0)$ に対して，f の**写像錐** C_f を

$$C_f = (Y \coprod CX)/\sim;\ (x, 0) \sim f(x) \in Y \qquad (x \in X)$$

で定義する．

定義 対 (X, A) が**ホモトピー拡張性質**をもつ

$\Longleftrightarrow g_0 = f|A$ をみたす任意の写像 $f: X \to Y$ とホモトピー $g_t: A \to Y$ に対して，$f_0 = f$，$f_t|A = g_t$ をみたすホモトピー $f_t: X \to Y$ がある．

次の性質は容易に確かめられる．

(1.27) (1) (C_f, Y) はホモトピー拡張性質をもつ．

(2) CW-対 (K, L) (CW-複体 K とその部分複体 L の対) はホモトピー拡張性質をもつ．

定理 1.28 (**Puppe の完全系列**) (1) $f: X \to Y$ の写像錐 C_f と射入 $j: Y \hookrightarrow C_f$ について，次の系列は完全である：

$$[C_f, W]_0 \xrightarrow{j^*} [Y, W]_0 \xrightarrow{f^*} [X, W]_0$$

(2) (X, A) がホモトピー拡張性質をもつならば，CA を1点に縮める等化写像 $\bar{\pi}: X \cup CA (= C_i) \to X/A$ はホモトピー同値写像である．$(i: A \hookrightarrow X)$

(3) (2)の仮定の下に，全単射 $\bar{\pi}^*: [X/A, W]_0 \cong [X \cup CA, W]_0$ と X を1点に縮める写像 $p: X \cup CA \to SA$ について，

$$\delta^* = \bar{\pi}^{*-1} \circ p^*: [SA, W]_0 \longrightarrow [X \cup CA, W]_0 \cong [X/A, W]_0$$

および，$\pi = \bar{\pi}|X: X \to X/A$ とおけば次の系列は完全である：

$$\cdots\xrightarrow{S\pi^*}[SX,\ W]_0\xrightarrow{Si^*}[SA,\ W]_0\xrightarrow{\delta^*}[X/A,\ W]_0\xrightarrow{\pi^*}[X,\ W]_0\xrightarrow{i^*}[A,\ W]_0$$

［証明］ (1) は容易に証明される．

(2) 仮定と CA が可縮なことから，$h_0=1$，$h_t(a,\ s)=(a,\ s+t-st)$ をみたすホモトピー $h_t: X\cup CA\to X\cup CA$ が存在する．このとき，$h_1=h\circ\bar{\pi}$ となる h: $X/A\to X\cup CA$ がある．$h\circ\bar{\pi}\simeq 1_{X\cup CA}$，$\bar{\pi}\circ h\simeq 1_{X/A}$ は容易に示される．

(3) (1) と (2) より，$j: X\hookrightarrow X\cup CA$ について，$\mathrm{Ker}\, i^*=\mathrm{Im}\, j^*=\mathrm{Im}(j^*\circ\bar{\pi}^*)=\mathrm{Im}\,\pi^*$．ここで i を j でおきかえると，π に相当するのは p であるから，$[SA,\ W]_0\xrightarrow{p^*}[X\cup CA,\ W]_0\xrightarrow{j^*}[X,\ W]_0$ は完全．これを全単射 $\bar{\pi}^*$ でおきかえると，完全系列 $\xrightarrow{\delta^*}\ \xrightarrow{\pi^*}$ がえられる．

p の写像錐 $C_p=SA\coprod C(X\cup CA)/\sim$ を考える．$p(X)=x_0$ であるから，$C_p\supset(x_0\coprod CX)/\sim=SX$．さらに，$C(CA)$ の部分はパラメーターを適当にとりかえると $(CA\times I)/(*\times I)$ に同相で，C_p は $Si: SA\to SX$ の写像柱 Z_{Si} において，$*\times I$ を 1 点に縮めたものと同相であることがわかる．従って，SX は C_p の変位レトラクトで，射入 $k: SA\hookrightarrow C_p$ は $-Si: SA\to SX$ と同値であることが示される $((-Si)(d_A(a,\ t))=d_X(i(a),\ 1-t))$．よって，$\mathrm{Ker}\,\delta^*=\mathrm{Ker}\, p^*=\mathrm{Im}\, k^*=\mathrm{Im}(-Si)^*=\mathrm{Im}(Si\ ^*$.　(終)

定理において，$W=K(G,\ n)$ とおけば，コホモロジー群の完全系列

$$\cdots\longrightarrow H^{n-1}(X;\ G)\xrightarrow{i^*}H^{n-1}(A;\ G)\xrightarrow{\delta^*}H^n(X/A;\ G)$$
$$\xrightarrow{\pi^*}H^n(X;\ G)\xrightarrow{i^*}H^n(A;\ G)\longrightarrow\cdots$$

がえられる．ただし，$\Omega W=K(G,\ n-1)$ であるから，定理 1.22 により

(1.29) $[SA,\ K(G,\ n)]_0\cong[A,\ K(G,\ n-1)]_0\cong H^{n-1}(A;\ G)\quad(n>1)$

§2 *H*-空間のホモロジー環と Hopf 代数

H-空間のホモロジー環

μ を積にもつ H-空間 X における Pontrjagin 積

$$\mu_*\circ\times: H_p(X;\ R)\otimes_R H_q(X;\ R)\xrightarrow{\times}H_{p+q}(X\times X;\ R)\xrightarrow{\mu_*}H_{p+q}(X;\ R)$$

に関して，$H_*(X;\ R)=\sum H_n(X;\ R)$ は（有階な）R 上の多元環（必ずしも結合律はみたさない）となる．

(2.1) (1) $(X,\ \mu)$：ホモトピー結合的 $\Longrightarrow H_*(X;\ R)$ は結合的．

(2)　$(X,\ \mu)$：ホモトピー可換 $\Longrightarrow H_*(X;\ R)$ は可換 $(\alpha\beta=(-1)^{pq}\beta\alpha,$
$\alpha\in H_p,\ \ \beta\in H_q)$.

H-空間 X が空間 Y に $\mu_Y: Y\times X\to Y$ で作用しているとき，同様に

$$\mu_{Y*}\circ\times : H_p(Y;\ R)\otimes_R H_q(X;\ R)\longrightarrow H_{p+q}(Y\times X;\ R)\longrightarrow H_{p+q}(Y;\ R)$$

によって，$H_*(X;\ R)$ の $H_*(Y;\ R)$ への右作用(R-加群の準同型)がえられる．

X の Y への作用が**ホモトピー結合的** $(\Longleftrightarrow \mu_Y\circ(\mu_Y\times 1_X)\simeq\mu_Y\circ(1_Y\times\mu))$ ならば，$H_*(Y;\ R)$ は $H_*(X;\ R)$-右加群となる．

ホモロジー環の計算には，主ファイバー空間 (E, p, B, F) のスペクトル系列(第3章，定理 2.18)

$$E^2_{*,*}=H_*(B;\ \underline{H_*(F;\ R)})\Longrightarrow H_*(E;\ R)$$

が使われる．第3章，補題 2.9(2) と同様に次が成り立つ：

(2.2)　主ファイバー空間 $(E,\ p,\ B,\ F)$ において，H-空間 F が弧状連結であれば，局所係数環 $\underline{H_*(F;\ R)}=\{H_*(F_b;\ R)\}$ は自明である．

また，第3章，補題 2.15 に対応して，次が成り立つ：

(2.3)　(1)　ファイバー空間 $(E,\ p,\ B)$ において，局所係数環 $\underline{H_*(F;\ R)}$ は自明，$H_*(B;\ R)$ または $H_*(F;\ R)$ は各次数で R-自由加群とするとき，次の R-加群の同型がある(R は主環)：

$$H_p(B;\ R)\otimes_R H_q(F;\ R)\cong E^2_{p,q}$$

(2)　上において，$(E,\ p,\ B)$ は主ファイバー空間とするとき，(1)の同型は $H_q(F;\ R)$ の作用によって与えられる $H_*(F;\ R)$-加群の同型であり，

$$d^r(x\cdot y)=d^r(x)\cdot y,\ \ x\in E^r_{p,q},\ \ y\in H_{q'}(F;\ R)$$

をみたす．

$(E,\ p,\ B)$ をファイバー空間，その底空間は弧状連結とすると，p の誘導する

$$\Omega p : \Omega(E,\ F)\longrightarrow\Omega B$$

は，準同型 $\Omega p_* : \pi_i(\Omega(E,\ F))\to\pi_i(\Omega B)$ を与えるが，これは $p_* : \pi_{i+1}(E,\ F)\to\pi_{i+1}(B)$ と同値である．第2章，定理 3.10 により p_* は同型であるから，Ωp は弱ホモトピー同値である．ホモトピー群，(コ)ホモロジー群は弱ホモトピー同値では不変であることから，(コ)ホモロジー群の計算では弱ホモトピー同値な

ものは同一視してよい．このようにするとき，ファイバー空間 $(P(E,F),\ p_1,\ E)$ において，ファイバー $\Omega(E,\ F)$ は ΩB で，$P(E,\ F)$ はその変位レトラクト F で，p_1 は射入 $i: F \hookrightarrow E$ でおきかえられる．さらに，ファイバー空間 $(\Omega(E,\ F), p_0,\ F)$ および $(P(\Omega(E,\ F),\ \Omega E),\ p_0,\ \Omega E)$ を考えることによって，次がえられる．

(2.4) $(E,\ p,\ B)$ をファイバー空間とするとき，適当な弱ホモトピー同値でおきかえることにより

$$(F,\ i,\ E,\ \Omega B),\qquad (\Omega B,\ d,\ F,\ \Omega E),\qquad (\Omega E,\ \Omega p,\ \Omega B,\ \Omega F)$$

は主ファイバー空間である．$(d: \Omega B \xleftarrow{\Omega p} \Omega(E,F) \xrightarrow{p_0} F)$

定理 2.5 **(Wang の完全系列)** ファイバー空間 $(E,\ p,\ B)$ において，$H_*(B;\ R) \cong H_*(S^{n+1};\ R)$ (R：主環) かつ局所係数環 $\underline{H_*(F;\ R)}$ は自明とするとき，次の完全系列がある．

$$\cdots \longrightarrow H_{q+1}(E;\ R) \xrightarrow{\Delta} H_{q-n}(F;\ R) \xrightarrow{\theta} H_q(F;\ R) \xrightarrow{i^*} H_q(E;\ R) \xrightarrow{\Delta} \cdots$$

特に，主ファイバー空間の場合，これは $H_*(F;\ R)$-加群の完全系列で，

$$\theta(x) = \theta(1)\cdot x$$

［証明］ 仮定より，$E^2_{n+1,q} \cong E^2_{0,q} \cong H_q(F;\ R)$，$E^2_{p,q}=0$ $(p \neq 0,\ n+1)$, $E^r_{p,q}=0$ $(r \geq 2;\ p \neq 0, n+1)$．従って，$d^r=0$ $(r \neq n+1) \Longrightarrow E^2_{p,q}=E^{n+1}_{p,q}$，$E^{n+2}_{p,q}=E^\infty_{p,q}$ かつ

$$0 \longrightarrow E^\infty_{n+1,q-n} \longrightarrow E^{n+1}_{n+1,q-n} \xrightarrow{d^{n+1}} E^{n+1}_{0,q} \longrightarrow E^\infty_{0,q} \longrightarrow 0$$

は完全．ここで，$E^\infty_{0,q}=D_{0,q}$，$E^\infty_{n+1,q-n}=D_{n+1,q-n}/D_{0,q+1}$ および $H_s(E;\ R)=D_{n+1,s-n-1}$ を使えば，定理の完全系列がえられる．後半はスペクトル系列が $H_*(F;\ R)$-加群としてのものであることから明らか． (終)

系 2.6 B が 1-連結かつ $H_*(B;\ R) \cong H_*(S^{n+1};\ R)$ ならば，

$$H_*(\Omega B;\ R) = R[x],\qquad x=\theta(1) \in H_n(\Omega B;\ R)$$

［証明］ 主ファイバー空間 $(PB,\ p,\ B,\ \Omega B)$ において PB は可縮であるから，$\theta: H_{q-n}(\Omega B;\ R) \to H_q(\Omega B;\ R)$ $(q>0)$ は $x=\theta(1)$ を乗ずることによってえられる同型である． (終)

古典群とその閉道空間のホモロジー環

定理 2.7 (1) $H_*(U(n)) = \Delta(e_1, e_3,\ \cdots,\ e_{2n-1})$

$$H_*(SU(n)) = \Delta(e_3,\ e_5,\ \cdots, e_{2n-1})$$

(2)　$H_*(Sp(n))=\Delta(e_3, e_7, \cdots, e_{4n-1})$

(3)　$\boldsymbol{k}$：標数 $\neq 2$ の体 $\Longrightarrow H_*(SO(2n+1);\boldsymbol{k})=\Delta(e_3, e_7, \cdots, e_{4n-1})$

$$H_*(SO(2n);\boldsymbol{k})=\Delta(e_3, e_7, \cdots, e_{4n-5}, e_{2n-1})$$

(4)　$\boldsymbol{k}$：標数 $=2$ の体 $\Longrightarrow H_*(SO(n);\boldsymbol{k})=\Delta(e_1, e_2, \cdots, e_{n-1})$

［証明］　第3章，のコホモロジー群に関する結果から，加群としてはこの結果は正しい．n に関する帰納法で，Wang の系列を使えば定理をうる．（終）

注意 2.7′　この定理で Δ を Λ におきかえてよいことは定理 2.17 で示す．従ってこれらのホモロジー環は可換である．

定理 2.8　$H_*(\Omega SU(n))=\boldsymbol{Z}[e_2, e_4, \cdots, e_{2n-2}]$，$e_{2i}\in H_{2i}$

$H_*(\Omega Sp(n))=\boldsymbol{Z}[e_2, e_6, \cdots, e_{4n-2}]$，$e_{4i-2}\in H_{4i-2}$

［証明］　第2章，定理 4.12 によって，$SU(n)$ は 1-連結 $\Longrightarrow \Omega SU(n)$ は弧状連結．従って，(2.3) (2) を主ファイバー空間 $(\Omega SU(n+1), \Omega p, \Omega S^{2n+1}, \Omega SU(n))$ のホモロジースペクトル列（$p: SU(n+1)\longrightarrow SU(n+1)/SU(n)=S^{2n+1}$）

$$E^2_{*,*}=H_*(\Omega S^{2n+1})\otimes H_*(\Omega SU(n))\Longrightarrow H_*(\Omega SU(n+1))$$

に適用できる．定理は $SU(1)=1$点 については自明であるから，n に関する帰納法の仮定と系 2.6 より，$H_{2n}(\Omega S^{2n+1})$ の生成元 e_{2n} について，

$$E^2_{*,*}=\boldsymbol{Z}[e_{2n}]\otimes\boldsymbol{Z}[e_2, \cdots, e_{2n-2}]$$

$E^2_{p,q}=0$ ($p+q$：奇数) $\Longrightarrow d^r=0$ $(r\geq 2)\Longrightarrow E^2_{*,*}=E^\infty_{*,*}$，即ちスペクトル系列は自明で，$i_*: H_*(\Omega SU(n))\to H_*(\Omega SU(n+1))$ は単射，$\Omega p_*: H_*(\Omega SU(n+1))\to H_*(\Omega S^{2n+1})$ は全射で，しかもこれらは環の準同型である．$\Omega p_*(e_{2n})=e_{2n}$ となる $e_{2n}\in H_{2n}(\Omega SU(n+1))=D_{2n,0}$ を選ぶと，その類は $[e_{2n}]=e_{2n}\otimes 1\in E^\infty_{2n,0}=D_{2n,0}/D_{2n-1,1}$ である．$e^k_{2n}\in D_{2kn,0}=H_{2kn}(\Omega SU(n+1))$ に $H_*(\Omega SU(n))$ を作用させると，$\alpha\in H_q(\Omega SU(n))=\boldsymbol{Z}[e_2, \cdots, e_{2n-2}]$ について，$e^k_{2n}\cdot\alpha\in D_{2kn,q}$ の類は $e^k_{2n}\otimes\alpha$ であることがわかる．このことから，$H_*(\Omega SU(n))$-加群の同型 $\boldsymbol{Z}[e_{2n}]\otimes H_*(\Omega SU(n))\cong H_*(\Omega SU(n+1))$ がえられる．

$SU(n+1)$ は H-空間 $\Longrightarrow \Omega SU(n+1)$ はホモトピー可換 H-空間 $\Longrightarrow$ ホモロジー環 $H_*(\Omega SU(n+1))$ は可換，に注意すれば，上の同型は環の同型であることがわかる．よって，定理の前半が証明された．後半の証明も同様である．（終）

$U(n)$，$SO(n)$ は 1-連結ではないから，それらの閉道空間はいくつかの弧状

成分に分かれる．

定義　位相空間 X の基本群 $\pi_1(X)$ の各元 α に対して，それを代表する閉道 $w(\alpha=[w])$ の属する閉道空間 $\Omega(X)$ の弧状成分を $\Omega_\alpha(X)$ で表わし，$\Omega(X)$ の **α-成分**という．特に $\Omega_0(X)$ は定値道(単位元)を含む 0-成分である．

補題 2.9　閉道空間 $\Omega(X)$ の各弧状成分 $\Omega_\alpha(X)$ は互いにホモトピー同値である．特に，X が位相群であれば，$\Omega_\alpha(X)$ は互いに同相である．

［証明］　閉道の積 $*: \Omega(X)\times\Omega(X)\to\Omega(X)$ において，$l\in\Omega(X)$ に $l*w$ を対応させると，$*w: \Omega_0(X)\to\Omega_\alpha(X)$ がえられ，逆の対応は w の逆の道 $\overline{w}$ を作ってえられる．$w*\overline{w}\simeq 0$ を使って，$(*\overline{w})\circ(*w)\simeq 1_{\Omega X}$ がえられる．同様に $(*w)\circ(*\overline{w})\simeq 1_{\Omega X}$．故に，$\Omega_0(X)$ と $\Omega_\alpha(X)$ はホモトピー同値である．X が位相群の場合には，閉道の積 $\cdot: \Omega(X)\times\Omega(X)\to\Omega(X)$ を $w\cdot w')(t)=w(t)w'(t)$, $t\in I$, で定義して，$\cdot w: \Omega_0(X)\to\Omega_\alpha(X)$ を考える．w^{-1} を $w^{-1}(t)=(w(t))^{-1}$ で定義すると，$(\cdot w^{-1})\circ(\cdot w)=1_{\Omega X}$，$(\cdot w)\circ(\cdot w^{-1})=1_{\Omega X}$ が成り立ち，$\cdot w$ は同相写像である．（終）

補題 2.10　$f: X\to Y$ は $i>1$ のとき同型 $f_*: \pi_i(X)\to\pi_i(Y)$ を誘導すると仮定する．$\alpha\in\pi_1(X)$，$\beta=f_*(\alpha)\in\pi_1(Y)$ とするとき，$\Omega f: \Omega_\alpha(X)\to\Omega_\beta(Y)$ は弱ホモトピー同値，従って(コ)ホモロジー群の同型を誘導する．特に，被覆空間$(\tilde{Y}, p, Y)$ において，Y が局所 1-連結($\Longleftrightarrow$ Y の各点は十分小さい 1-連結な近傍をもつ)ならば，$\Omega p: \Omega_\alpha(\tilde{Y})\to\Omega_\beta(Y)$ は同相写像である．

［証明］　f_* は $\Omega f_*: \pi_{i-1}(\Omega_0(X))\to\pi_{i-1}(\Omega_0(Y))$ と同値である．前補題の証明における写像 $*w$，$*(f\circ w)$ によって，Ωf_* は $\Omega f_*: \pi_{i-1}(\Omega_\alpha(X))\to\pi_{i-1}(\Omega_\beta(Y))$ と同値であることがわかる．これらは，$i>1$ で同型であり，$i=1$ では自明であるから，$\Omega f: \Omega_\alpha(X)\to\Omega_\beta(Y)$ は弱ホモトピー同値写像である．

被覆空間の場合には，Y が局所 1-連結から，ΩY が局所弧状連結であることが証明できる．評価写像 $e: \Omega_\beta(Y)\times I\to Y$ を，第 2 章，補題 1.7 を使って，$\tilde{e}: \Omega_\beta(Y)\times I\to\tilde{Y}$ にリフトできる．$\tilde{e}$ は $\Omega p: \Omega_\alpha(\tilde{Y})\to\Omega_\beta(Y)$ の逆写像 $\Omega_\beta(Y)\to\Omega_\alpha(\tilde{Y})$ を誘導し，Ωp は同相であることがわかる．（終）

定理 2.11　(1)　$H_*(\Omega_0 U(n))=\boldsymbol{Z}[e_2, e_4, \cdots, e_{2n-2}]$，$e_{2i}\in H_{2i}$

(2)　$\boldsymbol{k}$ を標数 $\neq 2$ の体，$n\geq 1$ とするとき，

$$H_*(\Omega_0 SO(2n+1);\ \boldsymbol{k})=\boldsymbol{k}[e_2, e_6, \cdots, e_{4n-2}]$$

$$H_*(\Omega_0 SO(2n+2);\ \boldsymbol{k})=\boldsymbol{k}[e_2,\ e_6,\ \cdots,\ e_{4n-2},\ e_{2n}]$$

［証明］ (1) $SU(n)$ はファイバー空間 ($U(n)$, det, $U(1)$) のファイバーで，$\pi_j(U(1))\cong\pi_j(S^1)=0$ ($j>1$). これから，$i_*:\pi_j(SU(n))\cong\pi_j(U(n))$, $i>1$, がわかり， 補題 2.10 により， $\Omega i:\Omega SU(n)\to\Omega_0 U(n)$ は弱ホモトピー同値． 従って，(1)は定理 2.8 の前半に帰着される．

(2) 補題 2.10 の後半により，普遍被覆群 (Spin(n), p, $SO(n)$) について，

(2.12) $\Omega p:\Omega\mathrm{Spin}(n)\to\Omega_0 SO(n)$ は同相写像である ($n\geq 3$).

一方，普遍被覆 $p':\mathrm{Spin}(n+1)\to SO(n+1)$ と射入 $i:SO(n)=SO(n)\times 1\hookrightarrow SO(n+1)$ を考えると，$i\circ p:\mathrm{Spin}(n)\to SO(n+1)$ は $\bar{i}:\mathrm{Spin}(n)\to\mathrm{Spin}(n+1)$ へ単位元を保つように一意的にリフトされる．しかも $\bar{i}$ は単射準同型で，Spin(n) は Spin$(n+1)$ の部分群と考えられる．このようにして，

$$\mathrm{Spin}(n)\subset\mathrm{Spin}(n+1)\subset\cdots\subset\mathrm{Spin}(m)\quad(m>n\geq 3)$$

と考えるとき，容易に次がえられる．

(2.13) $\mathrm{Spin}(m)/\mathrm{Spin}(n)\cong SO(m)/SO(n)$ (同相)

さて，(2)は(2.12)により $\Omega\mathrm{Spin}(n)$ について示せばよい． 第2章の(5.18)，(5.19)によって，$\mathrm{Spin}(3)\cong Sp(1)$, $\mathrm{Spin}(4)\cong Sp(1)\times Sp(1)$, であるから(2)は $n=1$ のとき正しい．n に関する帰納法により，定理 2.8 と同様な証明を次の２つの主ファイバー空間に施して，(2)が証明される：

$$\Omega\mathrm{Spin}(2n+1)\longrightarrow\Omega\mathrm{Spin}(2n+2)\longrightarrow\Omega S^{2n+1}$$

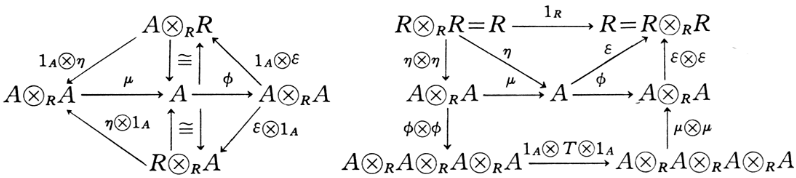
$$\Omega\mathrm{Spin}(2n+1)\longrightarrow\Omega\mathrm{Spin}(2n+3)\longrightarrow\Omega(SO(2n+3)/SO(2n+1))$$

ただし， 第3章， 定理 3.14 (2)により， $H_*(SO(2n+3)/SO(2n+1);\ \boldsymbol{k})\cong H^*(SO(2n+3)/SO(2n+1);\ \boldsymbol{k})=\Lambda(e_{4n+3})$ であることを使って証明する． (終)

Hopf 代数

定義 1をもつ有階可換環 R ($R=\sum R_i$, $R_i=0$ ($i\neq 0$)) 上の有階加群 $A=\sum_{i\geq 0}A_i$ が**準 Hopf 代数**である $\Longleftrightarrow$ A は次の条件 (*) をみたす**積** $\mu:A\otimes_R A\to A$, **co-積 (対角写像)** $\phi:A\to A\otimes_R A$, **単位 (元)** $\eta:R\to A$ および **co-単位 (元)** $\varepsilon:A\to R$ をもつ．

(*) μ, ϕ, η, ε は有階加群の準同型で以下の図式は可換である：



ただし，$T: A_i\otimes A_j\longrightarrow A_j\otimes A_i \Longleftrightarrow T(a\otimes a')=(-1)^{ij}a'\otimes a$

定義　$A=\sum_{i\geq 0}A_i$ は**連結**$\Longleftrightarrow A_0\cong R$.

連結な場合の準 Hopf 代数 $(A,\ \mu,\ \phi)$ の定義において，積を $a\cdot a'=\mu(a\otimes a')$ で表わすとき，条件 (*) は次の条件 (**) に簡易化される：

(**)　$\mu,\ \phi$ は有階加群の準同型，$1\in R=A^0$ は単位元 $(a\cdot 1=1\cdot a=a)$，
ϕ は準同型 $(\phi(aa')=\phi(a)\phi(a'))$，$\phi(1)=1\otimes 1$ および $a\in A_+=\sum_{i>0}A_i$ について $\phi(a)=a\otimes 1+1\otimes a+\sum a_i'\otimes a_i''$　$(a_i',\ a_i''\in A_+)$.

ただし，$A\otimes_R A$ における積は $(1_A\otimes T\otimes 1_A)(\mu\otimes\mu)$ で与えられる．

定義　準 Hopf 代数 $(A,\ \mu,\ \phi)$ について，

A は**結合的**$\Longleftrightarrow \mu(\mu\otimes 1)=\mu(1\otimes\mu)$

A は **co-結合的**$\Longleftrightarrow (\phi\otimes 1)\phi=\phi(1\otimes\phi)$

A は**可換**$\Longleftrightarrow \mu T=\mu$

A は **co-可換**$\Longleftrightarrow T\phi=\phi$

定義　$(A,\ \mu,\ \phi)$ は **Hopf 代数**$\Longleftrightarrow (A,\ \mu,\ \phi)$ は結合的な準 Hopf 代数.

定義　有階 R- 加群 $M=\sum M_i$ の双対加群 $M^*=\sum M_i^*$

$$\Longleftrightarrow M_i^*=\mathrm{Hom}_R(M_i,\ R)$$

有階 R-加群の準同型 $f: M\to N$ の**双対(準同型)** $f^*: N^*\to M^*$

$$\Longleftrightarrow f^*(\varphi)=\varphi\circ f$$

有階 R-加群 M が**有限型自由**$\Longleftrightarrow$各 M_i が有限個の基底をもつ自由 R-加群.

$x\in M_n$，$\varphi\in M_n^*=\mathrm{Hom}_R(M_n,\ R)$ に対して，Kronecker 積の記号

$$\langle\varphi,\ x\rangle=\varphi(x)\in R$$

を用いる．有限型自由な M に対して，$(M^*)^*=M$. M の 1 つの(斉次な)基底 $\{x_i\}$ に対してその**双対基底** $\{x_i^*\}$ は次で与えられる：

$$\langle x_i^*,\ x_j\rangle=\delta_{ij}$$

$M,\ N$ が有限型自由であれば，Kronecker 積を

$$\langle\varphi\otimes\psi,\ x\otimes y\rangle=(-1)^{mn}\langle\varphi,\ x\rangle\langle\psi,\ y\rangle\quad(x\in M_m,\ \psi\in M_n{}^*)$$

で与えることによって，$(M\otimes N)^*=M^*\otimes N^*$ とみなすことができる．以上の定義から容易に次の2定理がえられる．

定理 2.14　A は有限型自由とする．$(A,\ \mu,\ \phi)$ が単位 η，co-単位 ε をもつ準 Hopf 代数$\Longleftrightarrow(A^*,\ \phi^*,\ \mu^*)$ が単位 ε^*，co-単位 η^* をもつ準 Hopf 代数．

A：結合的$\Longleftrightarrow A^*$：co-結合的．　A：co-結合的$\Longleftrightarrow A^*$：結合的．

A：可換$\Longleftrightarrow A^*$：co-可換．　　A：co-可換$\Longleftrightarrow A^*$：可換．

定理 2.15　X は積 μ をもつ有限型 H-空間で $H_*(X;\ R)$ は R-自由とするとき，$H^*(X;\ R)$ はカップ積を積とし，$\mu^*:H^*(X;\ R)\to H^*(X\times X;\ R)\xleftarrow[\cong]{\times}H^*(X;\ R)\otimes H^*(X;\ R)$ を co-積とする可換な Hopf 代数であり，$H_*(X;\ R)\cong(H^*(X;\ R))^*$ は μ_* を積，カップ積の双対を co-積とする，co-結合的かつ co-可換な準 Hopf 代数である．H-空間 $(X,\ \mu)$ がホモトピー結合的（またはホモトピー可換）$\Longrightarrow H^*(X;\ R)$ は co-結合的（または co-可換）な Hopf 代数，また，$H_*(X;\ R)$は Hopf 代数（または可換な準 Hopf 代数）である．

Hopf 代数の議論は第7章，§1でも行なわれる．ここでは本章で必要な部分のみを考察する．

定義　連結な準 Hopf 代数 A の元 a が**原始的**$\Longleftrightarrow\phi(a)=a\otimes 1+1\otimes a,\ a\neq 0$.

補題 2.16　全空間 E は ∞-連結，底空間 B は1-連結，ファイバー F のコホモロジー $H^*(F;\ R)$ は有限型自由である主ファイバー空間 $(E,\ p,\ B,\ F)$ において，懸垂 $\sigma:H^{n+1}(B;\ R)\to H^n(F;\ R)\ (n>0)$ の(0でない)像は原始的である．

［証明］　F の作用を $\mu:(E\times F,\ F\times F)\to(E,\ F)$ とし，μ^* を Künneth の同型で書き直せば，次の可換図式がえられる（係数環 R は省略）：

$$\begin{array}{ccccccc}
H^*(B) & \xrightarrow{p^*} & H^*(E,\ F) & \xleftarrow[\cong]{\delta^*} & H^*(F) & & \\
\cong\downarrow\otimes 1 & & \downarrow\mu^* & & \downarrow & & \\
H^*(B)\otimes R & \xrightarrow{p^*\otimes\varepsilon} & H^*(E,F)\otimes H^*(F) & \xleftarrow{\delta^*\otimes 1} & H^*(F)\otimes H^*(F) & \xleftarrow{i^*\otimes 1} & H^*(E)\otimes H^*(F)
\end{array}$$

このとき，$\sigma=\delta^{*-1}\circ p^*$ であるから，$(\delta^*\otimes 1)(\mu^*(\sigma(x)))=\mu^*p^*(x)=p^*(x)\otimes 1=(\delta^*\otimes 1)(\sigma(x)\otimes 1)$．故に $\mu^*(\sigma(x))=\sigma(x)\otimes 1+1\otimes y$ となる $y\in H^*(F)$ がある．$y=\sigma(x)$ は明らか．　　（終）

定理 2.17　(1)　有限型自由な準 Hopf 代数 A が原始的な生成元の単純系

$\{x_i\}$ をもつ：$A=\Delta(x_1,\ x_2,\ \cdots)$ ならば A の基底 $\{x_{i_1}\cdots x_{i_r};i_1<\cdots<i_r\}$ に関するxの双対 $x_i{}^*$ について，A^* は可換な Hopf 代数かつ $A^*=\Lambda(x_1{}^*,\ x_2{}^*,\ \cdots)$.

(2)　定理 2.7 は Δ を Λ でおきかえて成り立つ．ただし，$e_{2i-1}=\sigma(c_i)^*$，$e_{4i-1}=\sigma(q_i)^*$，$e_{4i-1}=\sigma(p_i)^*$，$e_{2n-1}=\sigma(\chi)^*$，$e_i=\sigma(w_{i+1})^*$ とそれぞれおきかえる．

［証明］　(1)　まず，$\phi(x_i)=x_i\otimes 1+1\otimes x_i \Longrightarrow T\phi(x_i)=\phi(x_i)$，$(\phi\otimes 1)\phi(x_i)=(1\otimes\phi)\phi(x_i)$．$\phi$ は環の準同型で，A は $\{x_i\}$ で生成されるから，A は co-可換かつ co-結合的 $\Longrightarrow A^*$ は可換な Hopf 代数．0 または 1 からなり有限個のみ 0 でない数列 $J=(j_1,\ j_2,\ \cdots)$ について，$x_J=x_1{}^{j_1}x_2{}^{j_2}\cdots$ とおけば $\{x_J\}$ は A の基底．$\phi(x_i)=x_i\otimes 1+1\otimes x_i \Longrightarrow \phi(x_I)=\sum_{J+K=I}\pm x_J\otimes x_K$．同様に $x_J{}^*=(x_1{}^*)^{j_1}(x_2{}^*)^{j_2}\cdots$ とおくとき $\langle x_J{}^*, x_I\rangle=\pm\delta_{JI}$ であることを J の大きさ $|J|=\sum j_i$ に関する帰納法で示そう．$x_L=x_Mx_S$ となるとき，$\langle x_L{}^*,\ x_I\rangle=\langle\phi^*(x_M{}^*\otimes x_S{}^*),\ x_I\rangle=\langle x_M{}^*\otimes x_S{}^*,\ \phi(x_I)\rangle=\sum_{J+K=I}\pm\langle x_M{}^*,\ x_J\rangle\langle x_S{}^*,\ x_K\rangle$ において $\langle x_S{}^*,\ x_K\rangle$ は $x_S=x_K$ のときのみ 0 でない．また，$x_S=x_K$ のとき，帰納法の仮定から，$\langle x_M{}^*,\ x_J\rangle\neq 0$ となるのは $M=J \Longrightarrow L=I$ のときのみである．故に $\langle x_J{}^*,\ x_I\rangle=\pm\delta_{JI}$ で $\{\pm x_J{}^*\}$ は双対基底 $\Longrightarrow A^*=\Delta(x_1{}^*,\ x_2{}^*,\ \cdots)$.

$\langle(x_i{}^*)^2,\ x_I\rangle=\sum_{J+K=I}\pm\langle x_i{}^*,\ x_J\rangle\langle x_j{}^*,\ x_K\rangle$ が 0 でないのは $x_J=x_K=x_I$ の場合のみであるが，$I=J+K$ となる I はない．故に $(x_i{}^*)^2=0 \Longrightarrow A=\Lambda(x_1,\ x_2,\ \cdots)$

(2)は補題 2.16 と第 3 章の $H^*(G;\ R)$ の結果を使って(1)より導かれる．(終)

定義　対称式 $t_1{}^n+t_2{}^n+\cdots+t_m{}^n$ $(1\leq n\leq m)$ を基本対称式 σ_i $(1+\sum_{i=1}^{m}\sigma_i=\prod_{i=1}^{m}(1+t_i))$ の多項式で表わしたものを

$$s_n(\sigma_1,\ \cdots,\ \sigma_n)\in \boldsymbol{Z}[\sigma_1,\ \cdots,\ \sigma_n]$$

で表わす(この定義は m のとり方によらない).

定理 2.18　可換な Hopf 代数 A が $\{x_i\in A_{id},\ i=1,\ 2,\ \cdots;\ d>0\}$ を変数とする多項式環 $A=R[x_1,\ x_2,\ \cdots]$，$\phi(x_i)=\sum_{j+k=i}x_j\otimes x_k$ $(x_0=1)$ のとき

(1)　x_i の単項式に関する双対基底について $y_i=(x_1{}^i)^*$ とすれば

$$A^*=R[y_1,\ y_2,\ \cdots],\quad \mu^*(y_i)=\sum_{j+k=i}y_j\otimes y_k\quad (y_0=1)$$

(2)　$s_n(x_1,\ \cdots,\ x_n)$ は原始的．$R=\boldsymbol{Z},\ \boldsymbol{Q}$ ならば A の原始的な元は $s_n(x_1,\cdots,\ x_n)$ の定数倍である．

［証明］　(1)　ϕ の形から，A はco-可換かつ co-結合的 $\Longrightarrow A^*$ は可換な Hopf

代数．$I=(\phi)$ または $1\leq i_1\leq\cdots\leq i_r$ をみたす整数列を $I=(i_1, \cdots, i_r)$ とし， $x_I=x_{i_1}\cdots x_{i_r}$ とおけば $\{x_I\}$ は A の基底である．同様に，$J=(j_1, \cdots, j_s)$ について $y_J=y_{j_1}\cdots y_{j_s}$ とおく．

対応 $I\to\lambda(I)$ を次のように帰納的に定める．$\lambda(\phi)=(\phi)$．$I=(i_1, \cdots, i_r)$ とし，$(i_1-1, \cdots, i_r-1)$ から0の項を取り去った列 I_r について，$\lambda(I_r)=(j_1, \cdots, j_s)$ のとき，$\lambda(I)=(j_1, \cdots, j_s, r)$．$\lambda$ が1対1対応であることは容易にわかる．さらに，

$$I>I'=(i_1', \cdots, i_t')\Longleftrightarrow t<r \text{ または } t=r \text{ で } i_r=i_r', \cdots, i_{k+1}=i'_{k+1},\ i_k>i_k' \text{ となる } k \text{ がある}$$

によって順序を入れるとき， $\phi(x_I)=x_{I_r}\otimes x_1{}^r+$(他の項)，$I>I'\Longrightarrow\phi(x_{I'})=x_{I'r}\otimes x_1{}^r+$(他の項)かまたは $*\otimes x_1{}^r$ の項を含まない．また I_r' があるとき$(t=r)$ は $I>I'\Longrightarrow I_r>I_r'$．以上のことから帰納的に次がわかる：

$$\langle y_{\lambda(I)}, x_I\rangle=1,\quad I>I'\Longrightarrow\langle y_{\lambda(I)}, x_{I'}\rangle=0$$

λ が1対1であるから，これは$\{y_J\}$が A^* の基底であることを示している．

$\langle\mu^*(y_i), x_J\otimes x_K\rangle=\langle y_i, x_Jx_K\rangle$．これが0でないのは $x_J=x_1{}^j$，$x_K=x_1{}^k$，$j+k=i$ のときのみであるから，$\mu^*(y_i)=\sum_{j+k=i}y_j\otimes y_k$.

(2) まず，$s_n=s_n(x_1, \cdots, x_n)$ について次の **Newton の公式**に注意する：

(2.18)′ $\quad s_n=\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i-1}x_is_{n-i}+(-1)^{n-1}nx_n$

$s_1=x_1$ は原始的である．n に関する帰納法により，

$$\begin{aligned}\phi(s_n)&=\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i-1}\phi(x_i)\phi(s_{n-i})+(-1)^{n-1}n\phi(x_n)\\&=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j+k=i}((-1)^{j-1}x_js_{n-i}\otimes(-1)^kx_k+(-1)^kx_k\otimes(-1)^{j-1}x_js_{n-i})\\&\quad+\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k((-1)^{n-k-1}(n-k)x_{n-k}\otimes x_k+x_k\otimes(-1)^{n-k-1}(n-k)x_{n-k})\\&=s_n\otimes1+1\otimes s_n+\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k(A_{n-k}\otimes x_k+x_k\otimes A_{n-k})\end{aligned}$$

ここで，$A_{n-k}=\sum_{j=0}^{n-k-1}(-1)^{j-1}x_js_{n-k-j}+(-1)^{n-k-1}(n-k)x_{n-k}=0$ であるから s_n は原始的である．$R=\boldsymbol{Q}$ のときは，(2.18)′ により，$A=\boldsymbol{Q}[s_1, s_2, \cdots]$．このとき，$\phi(s_Is_J)$ は $s_I\otimes s_J$ の項を含み s_Is_J と異なる単項式から $s_I\otimes s_J$ は現われないから，原始的な元は s_i のスカラー倍．$\boldsymbol{Z}[x_1, x_2, \cdots]$ に制限して(2)の後半をうる． (終)

spinor 群のコホモロジー

普遍 $\boldsymbol{Z}_2$-バンドル $\boldsymbol{Z}_2 \to E\boldsymbol{Z}_2 \to B\boldsymbol{Z}_2$ について，射入 $SO(n)=(1\text{点})\times_G \mathrm{Spin}(n) \to E\boldsymbol{Z}_2 \times_G \mathrm{Spin}(n)$ $(G=\boldsymbol{Z}_2)$ はホモトピー同値となるから，同伴バンドル $\mathrm{Spin}(n) \to E\boldsymbol{Z}_2 \times_G \mathrm{Spin}(n) \to B\boldsymbol{Z}_2$ は次の形の主ファイバー空間と思ってよい．

$$\mathrm{Spin}(n) \xrightarrow{p} SO(n) \xrightarrow{f} B\boldsymbol{Z}_2$$

ここで，p は被覆写像，f はこの被覆を誘導する写像である．

$H^*(B\boldsymbol{Z}_2;\ \boldsymbol{Z}_2)=\boldsymbol{Z}_2[t]$，$H^*(SO(n);\ \boldsymbol{Z}_2)=\Delta(e_1,\ e_2,\ \cdots,\ e_{n-1})$，$e_i=\sigma w_{i+1}$，はすでに知られている．$e_i=p^*e_i \in H^i(\mathrm{Spin}(n);\ \boldsymbol{Z}_2)$ と同じ記号で表わす．

定理 2.19　(1)　$s=s(n)$ を $2^{s-1}<n\leq 2^s$ をみたす整数とするとき，$z\in H^{2^s-1}(\mathrm{Spin}(n);\ \boldsymbol{Z}_2)$ で $\tau(z)=t^{2^s}$ をみたすものがあり，

$$H^*(\mathrm{Spin}(n);\ \boldsymbol{Z}_2)=\Delta(z,\ e_i\ (i<n,\ i\neq 2^r)).$$

ここで，$Sq^j e_i=\binom{i}{j}e_{i+j}$，特に $e_i{}^2=e_{2i}$．ただし，$i\geq n$ または $i=2^r$ のときは $e_i=0$ とする．

(2)　$\boldsymbol{k}$：標数 $\neq 2$ の体 $\Longrightarrow p^*: H^*(SO(n);\ \boldsymbol{k})\cong H^*(\mathrm{Spin}(n);\ \boldsymbol{k})$

［証明］　(1)　$n\geq 3$ に関する帰納法による．$\mathrm{Spin}(3)\cong Sp(1)$ であるから，$n=3$ のときは明らか．ファイバーバンドル $\mathrm{Spin}(n)\xrightarrow{i}\mathrm{Spin}(n+1)\xrightarrow{\pi}S^n$ に関するスペクトル系列（係数体 $\boldsymbol{Z}_2$ は省略する）

$$'E_2=H^*(S^n)\otimes H^*(\mathrm{Spin}(n)) \Longrightarrow H^*(\mathrm{Spin}(n+1))$$

を考える．$i^*: H^*(SO(n+1))\to H^*(SO(n))$ において e_i $(i<n)$ は i^* の像であるから，$e_i\in H^*(\mathrm{Spin}(n))$ についてもそうで，$'d_r(1\otimes e_i)=0$．従って $'d_r(1\otimes z)$ が決まれば，このスペクトル系列を計算できる．

$n<2^s$ のときをまづ考え，$'d_r(1\otimes z)\neq 0$ と仮定する．このとき，次数 $<2^s+2$ で $(\Lambda(s_n)\otimes\Delta(e_i\ (i<n,\ i\neq 2^r)))/(x)\cong {}'E_\infty=GrH^*(\mathrm{Spin}(n+1))$，ただし，$x$ の次数は 2^s．ここで $\mathrm{Spin}(n+1)\xrightarrow{p}SO(n+1)\xrightarrow{f}B\boldsymbol{Z}_2$ に関するスペクトル系列

$$E_2=\boldsymbol{Z}_2[t]\otimes H^*(\mathrm{Spin}(n+1)) \Longrightarrow H^*(SO(n+1))=\Delta(e_1,\ e_2,\ \cdots,\ e_n)$$

を考え，Poincaré 多項式を比較すると，次数 $<2^s+2$ で $E_2=E_\infty$ であることがわかる．従って，$f^*: H^{2^s}(B\boldsymbol{Z}_2)\to H^{2^s}(SO(n+1))$ は単射．明らかに $f^*(t)=e_1 \Longrightarrow f^*(t^{2^s})=e_1{}^{2^s}=e_{2^s}=0(n<2^s)$．これは矛盾であるから，$('d_r(1\otimes z)=0 \Longrightarrow \{'E_r\}$ は自明 $\Longrightarrow H^*(\mathrm{Spin}(n+1))=\Delta(z,\ \pi^*s_n,\ e_i\ (i<n,\ i\neq 2^r))$．再びスペクトル系列 $\{E_r\}$ を考えると，π^*s_n を e_n にとり直し，z を $\tau(z)=t^{2^s}$ に選べることが

わかる. $Sq^j e_i=\binom{i}{j}e_{i+j}$ は $SO(n+1)$ で成り立つから $\mathrm{Spin}(n+1)$ でも正しい.

次に, $n=2^s$ のときを考える. $'d_r(1\otimes z)=0$ ならばスペクトル系列 $\{'E_r\}$ は自明で, $H^*(\mathrm{Spin}(n+1))=\Delta(\pi^*s_n,\ z,\ e_i\ (i<n, i\neq z^r))$. π は $\mathrm{Spin}(n)\xrightarrow{p}SO(n)\xrightarrow{\pi'}S^n$ と分解される. $H^*(SO(n+1))$ では $\pi'^*s_n-e_n\in\Delta(e_i(i<n))$. $n=2^s\Rightarrow p^*(e_n)=0$. 故に $\pi^*s_n\in\Delta(e_i\ (i<n,\ i\neq 2^r))$. これは矛盾であるから $'d_r(1\otimes z)\neq 0$. $n<2^s$ の場合と同様に, 次数 $<2^s+2$ で $H^*(\mathrm{Spin}(n+1))\cong\Delta(\pi^*s_n,\ e_i\ (i<n,\ i\neq 2^r))/(y)$. 上の考察から, $y=\pi^*s_n+\mathrm{decomp}$, $'d_n(1\otimes z)=s_n\otimes 1+\cdots\Longrightarrow {}'E_{n+1}=\Delta(s_n\otimes z)\otimes\Delta(e_i\ (i<n,\ i\neq 2^r))$. ここで, さらに $'d_r(s_n\otimes z)\neq 0$ ならば 次数$<2^{s+1}+2$ で $n<2^s$ の場合と同様な議論をして矛盾がでるから, $'d_r(s_n\otimes z)=0\Longrightarrow {}'E_{n+1}={}'E_\infty\Longrightarrow H^*(\mathrm{Spin}(n+1))=\Delta(\bar{z},\ e_i\ (i<n,\ i\neq 2^r))$. ここで, $\bar{z}\in H^{2n-1}$ は $s_n\otimes z$ に対応し, $2n-1=2^{s+1}-1=2^{s(n+1)}-1$. $\{E_r\}$ を考えて, $\mathrm{Spin}(2^s+1)$ の場合の結果をうる.

(2)は $H^*(B\boldsymbol{Z}_2;\ \boldsymbol{k})\cong\boldsymbol{k}$ よりえられる. (終)

補題 2.20 次数 $<n-3$ の範囲で次が成り立つ:

(1) $H^*(\Omega\mathrm{Spin}(n);\ \boldsymbol{Z}_2)\cong H^*(\Omega_0 SO(n);\ \boldsymbol{Z}_2)=\boldsymbol{Z}_2[x_2,\ x_6,\ \cdots,\ x_{4k-2},\ \cdots]$,

$$x_{4k-2}=\sigma(e_{4k-1})\quad(e_{4k-1}=\sigma(w_{4k}))$$

(2) $H^*(\Omega_0 SO(n))$ は自由加群でその Poincaré 多項式は $\prod_{k\geq 1}\dfrac{1}{1-t^{4k-2}}$.

[証明] (1) $\Omega\mathrm{Spin}(n)\cong\Omega_0 SO(n)$ であるから $\Omega\mathrm{Spin}(n)$ について示す. 定理2.19より, 次数 $<n-1$ で $H^*(\mathrm{Spin}(n);\ \boldsymbol{Z}_2)=\boldsymbol{Z}_2[e_3,\ e_5,\ e_7,\ \cdots]$ $(e_{2i}=e_i{}^2)$. 次数 $<n-3$ で自然な対応 $\Delta(x_2,\ x_4,\ x_6,\ \cdots)\to H^*(\Omega\mathrm{Spin}(n);\ \boldsymbol{Z}_2)$ $(x_{2i}=\sigma(e_{2i+1}))$が同型であることをいう. このためには比較定理(戸田-三村[14]第1章, 定理3.15および本書第7章, 定理2.4)が必要である. 形式的スペクトル系列 $'E_2=\boldsymbol{Z}_2[e_3,\ e_5,\ e_7,\ \cdots]\otimes\Delta(x_2, x_4,\ x_6,\ \cdots)$ に d_r を分配性と $d_r(1\otimes x_{2i})=e_{2i+1}\otimes 1$ によって導入すると, $'E_\infty\cong\boldsymbol{Z}_2$となる. $\Omega\mathrm{Spin}(n)\to P\mathrm{Spin}(n)\to\mathrm{Spin}(n)$ のスペクトル系列と比較して, $H^*(\Omega\mathrm{Spin}(n);\ \boldsymbol{Z}_2)=\Delta(x_2,\ x_4,\ x_6,\ \cdots)$ が次数 $<n-3$ で成り立つことがわかる. $x_{2i}{}^2=Sq^{2i}x_{2i}=Sq^{2i}\sigma(e_{2i+1})=\sigma(Sq^{2i}e_{2i+1})=\sigma\left(\binom{2i+1}{2i}e_{4i+1}\right)=\sigma(e_{4i+1})=x_{4i}$. よって, (1)をうる.

(2)は(1)と定理2.13 (3)に普遍係数定理を使えばえられる. (終)

系 2.21 次数 $<n-3$ で, $H_*(\Omega_0 SO(n);\ \boldsymbol{Z}_2)=\Delta(x_2{}^*,\ x_4{}^*,\ x_6{}^*,\ \cdots)$

[証明] 補題2.20の $H^*(\Omega_0 SO(n);\ \boldsymbol{Z}_2)=\boldsymbol{Z}_2[x_2,\ x_6,\ x_{10},\ \cdots]=\Delta(x_2,\ x_4,$

$x_6, \cdots)$ において，$x_{2i}=\sigma(e_{2i+1})$ は補題 2.16 により原始的．定理 2.17 (1) の証明は次数を制限しても成り立つから，系がえられる．　　（終）

§3　無限次元対称空間

無限次元古典群

古典群や第3章，§6 で調べた古典型対称空間は無限次元まで拡張することができる．その重要な性質は H-空間であること，適当なサイクルによって他の閉道空間となり，2 または 8 回の周期で Bott の周期性定理が成り立つこと，および K-群の理論と密接に関連することである．

本節では，G は U, SU, O, SO, Sp のいずれかを表わす．例えば，$G(n)$ で $U(n)$, $SU(n)$, $O(n)$, $SO(n)$, $Sp(n)$ のいずれか適当なものを示している．

対応 $G(n)\ni A\to A\oplus I_1\in G(n+1)$ によって，コンパクト Hausdorff 空間の列

$$G(1)\subset G(2)\subset\cdots\subset G(n)\subset G(n+1)\subset\cdots$$

がえられる．

定義　$\boldsymbol{G}=\bigcup_n G(n)$ に弱位相を与えたものを**無限次元古典群**（例えば**無限次元ユニタリー群**，**無限次元直交群**，等）という．

弱位相の定義 “X が $\boldsymbol{G}$ の開集合$\Longleftrightarrow X\cap G(n)$ が $G(n)$ の開集合” より，

(3.1)　(1)　F が $\boldsymbol{G}$ の閉集合$\Longleftrightarrow F\cap G(n)$ が $G(n)$ の閉集合，

(2)　$f:\boldsymbol{G}\to Y$ が連続$\Longleftrightarrow$各 n について $f|G(n):G(n)\to Y$ が連続，

(3)　$f_t:\boldsymbol{G}\to Y$ がホモトピー$\Longleftrightarrow$各 n について $f_t|G(n)$ がホモトピー，

(4)　C は $\boldsymbol{G}$ のコンパクト部分集合$\Longleftrightarrow$ある n があって $C\subset G(n)$．

$G(n+1)$ における積 μ_{n+1} を $G(n)$ に制限すれば $G(n)$ における積 μ_n となるから，$\mu|G(n)\times G(n)=\mu_n$ とおき，(3.1) (2) を用いて $\boldsymbol{G}$ における積

$$\mu:\boldsymbol{G}\times\boldsymbol{G}\longrightarrow\boldsymbol{G}$$

が定義されて連続である．逆元についても同様で，

(3.2)　上の積 μ に関して $\boldsymbol{G}$ は位相群をなす．

定義　自然数 $\boldsymbol{N}$ の間の単射 $\alpha:\boldsymbol{N}\to\boldsymbol{N}$ について，

$\psi_\alpha:\boldsymbol{G}\longrightarrow\boldsymbol{G}\Longleftrightarrow A=(a_{kl})\in G(m)$ のとき $\psi_\alpha(A)=B=(b_{ij})\in G(n)$,

ただし，$n\geq\mathrm{Max}\{\alpha(i);\ 1\leq i\leq m\}$ とし

$$b_{ij}=\begin{cases} a_{kl} & (i=\alpha(k),\ j=\alpha(l)) \\ \delta_{ij} & (i\notin \mathrm{Im}\,\alpha \text{ または } j\notin \mathrm{Im}\,\alpha) \end{cases}$$

補題 3.3　ψ_α は単射の準同型で，それらは互いに基点(単位元)を保ってホモトープである．特に，$\psi_\alpha\simeq 1_G : \boldsymbol{G}\longrightarrow\boldsymbol{G}$.

［証明］　ψ_α が単射であることは明らか．$A, B\in G(n)$ に対して，$\psi_\alpha(AB)=\psi_\alpha(A)\psi_\alpha(B)$ も容易に確かめられ，ψ_α は準同型である．連続性は(3.1)，(2)による．

後半は $\psi_\alpha\simeq 1_G$ を示せば十分．$\boldsymbol{N}$ の全単射 $\sigma : \boldsymbol{N}\to\boldsymbol{N}$ で，十分大きい m をとれば $j>m \Longrightarrow \sigma(j)=j$ となるものを有限な置換ということにする．この σ は $\{1,\cdots,m\}$ の置換と同一視してよい．α に対して，有限な置換の列 $\sigma_1, \sigma_2, \cdots$ で，次の条件をみたすものをとる：

イ）　$\sigma_i(j)=j\quad(j<i)$,

ロ）　σ_i は偶置換,

ハ）　j に対して十分大きい $n=n(j)$ をとれば，$\sigma_n\cdots\sigma_2\sigma_1(\alpha(j))=j$.

σ_i の作り方は，帰納的に行なう．$\sigma_n\cdots\sigma_2\sigma_1(\alpha(j))=j$ が $j\leq n=n(j)$ に対して成り立つようにとれたとする．$\sigma_n\cdots\sigma_2\sigma_1(\alpha(n+1))\geq n+1$ であるから，有限な偶置換 σ_{n+1} で，$\sigma_{n+1}\sigma_n\cdots\sigma_1(\alpha(n+1))=n+1$, $\sigma_{n+1}(j)=j\,(j\leq n)$ をみたすものがとれる．以下これを繰り返せばよい．

σ_i が $\{1, \cdots, m_i\}$ の置換と同一視できるとき，$P_i=(\delta_{j\sigma_i(j)})$ とおけば，イ)，ロ)により，$P_i\in 1\times SO(m_i-i)\subset SO(m_i)\subset G(m_i)$. $SO(m_i-i)$ は 0-連結であるから P_i と単位元を結ぶ道 $w_i : I\to 1\times SO(m_i-i)\subset G(m_i)$ がある．P_i, w_i を $\boldsymbol{G}$ で考える．$A\in G(m)$, $\psi_\alpha(A)\in G(n)$ に対して，ホモトピー h_t を

$$h_t(A)=w_1(t)\cdots w_k(t)\psi_\alpha(A)w_k(t)^{-1}\cdots w_1(t)^{-1}\quad(k\geq n)$$

で定義する．$k>n$ ならば $w_k(t)f_\alpha(A)w_k(t)^{-1}=f_\alpha(A)$ であるから，h_t は k のとり方によらず定まり，ホモトピー $h_t : \boldsymbol{G}\to\boldsymbol{G}$ を定める．$h_1=\psi_\alpha$ および $h_0=1_G$ が確かめられるから，$\psi_\alpha\simeq 1_G$.　　(終)

定義　単射 $\alpha, \beta : \boldsymbol{N}\to\boldsymbol{N}$ に対して，

$$\psi_{\alpha,\beta} : \boldsymbol{G}\times\boldsymbol{G}\longrightarrow\boldsymbol{G} \Longleftrightarrow \psi_{\alpha,\beta}=\boldsymbol{\mu}\circ(\psi_\alpha\times\psi_\beta)$$

定理 3.4　(1)　$\psi_{\alpha,\beta}$ は互いにホモトープ．特に，$\psi_{\alpha,\beta}\simeq\boldsymbol{\mu}$.

(2)　$\mathrm{Im}\,\alpha\cap\mathrm{Im}\,\beta=\phi$ ならば，$\psi_{\alpha,\beta}$ は単射で積と可換(準同型)である．

(3)　$(\boldsymbol{G},\ \psi_{\alpha,\beta})$ はホモトピー可換な H-群である．

［証明］ (1)　補題 3.3 より容易．特に，$\alpha=\beta=1_N\Longrightarrow\psi_{\alpha,\beta}=\boldsymbol{\mu}$.

(2)　$\mathrm{Im}\,\alpha\cap\mathrm{Im}\,\beta=\phi\Longrightarrow\psi_{\alpha,\beta}$：単射は明らか．ここでさらに，$\mathrm{Im}\,\psi_\alpha$ と $\mathrm{Im}\,\psi_\beta$ は元ごとに可換であるから，$\psi_{\alpha,\beta}(xy)=\psi_\alpha(xy)\psi_\beta(xy)=\psi_\alpha(x)\psi_\alpha(y)\psi_\beta(x)\psi_\beta(y)$ $=\psi_\alpha(x)\psi_\beta(x)\psi_\alpha(y)\psi_\beta(y)=\psi_{\alpha,\beta}(x)\psi_{\alpha,\beta}(y)$.

(3)　(1)より $\psi_{\alpha,\beta}\simeq\psi_{\beta,\alpha}$. これはホモトピー可換性を表わす．$\mathrm{Im}\,\alpha$, $\mathrm{Im}\,\beta$, $\mathrm{Im}\,\gamma$ が互いに共通部分をもたないとき，$\psi_{\alpha,\beta}\circ(1\times\psi_{\beta,\gamma})=\psi_{\beta,\gamma}\circ(\psi_{\alpha,\beta}\times1)$ が成り立つ．(1)を用いてホモトピー結合性がえられる．補題 1.23 より $(\boldsymbol{G},\ \psi_{\alpha,\beta})$ は H-群．$\boldsymbol{\mu}\circ(1\times\boldsymbol{\mu})=\boldsymbol{\mu}\circ(\boldsymbol{\mu}\times1)$ を使ってもよいが，後の都合上この形で証明した．　(終)

無限次元対称空間

第3章，§6の古典型対称空間の極限として無限次元対称空間がえられる．以下これを2つの場合に分けて定義する．

$H(n)\subset G(n)$ は次の包含関係からえられるものの1つとする：

$$SO(n)\subset SU(n)\subset U(n)\subset Sp(n)$$

$$SO(n)\subset O(n)\subset U(n)$$

このとき，$H(n)=H(n)\times1\subset H(n+1)$, $G(n)=G(n)\times1\subset G(n+1)$ に関して

$$H(n)=G(n)\cap H(n+1)$$

が成り立つから，自然な写像 $G(n)/H(n)\to G(n+1)/H(n+1)$ は単射である．$G(n)/H(n)$ はコンパクト Hausdorff 空間であるから，この写像によって $G(n+1)/H(n+1)$ の閉部分空間とみなすことができる．このとき

定義　$\bigcup_n G(n)/H(n)$ に弱位相を与えたものを，$\boldsymbol{G}$ の $\boldsymbol{H}$ による**商空間**といい，$\boldsymbol{G}/\boldsymbol{H}=\bigcup_n G(n)/H(n)$ で表わす．

射入 $H(n)\longrightarrow G(n)$ および射影 $G(n)\longrightarrow G(n)/H(n)$ は

$$\boldsymbol{i}:\boldsymbol{H}\longrightarrow\boldsymbol{G}\quad\text{および}\quad\boldsymbol{\pi}:\boldsymbol{G}\longrightarrow\boldsymbol{G}/\boldsymbol{H}$$

を誘導する．これらも，**射入**，**射影**という．特別な G, H については次の記号を用いて区別する：

$$i_C : O \longrightarrow U,\ \ SO \longrightarrow SU,\ \ SO \longrightarrow U$$
$$i_H : U \longrightarrow Sp,\ \ SU \longrightarrow Sp$$

定理 3.5 $\alpha, \beta : N \to N$ は単調増加とする.

(1) $\psi_\alpha : G \to G$ は $\psi_\alpha : G/H \to G/H$ を誘導し，図式

$$\begin{array}{ccccc} H & \xrightarrow{i} & G & \xrightarrow{\pi} & G/H \\ \downarrow{\psi_\alpha} & & \downarrow{\psi_\alpha} & & \downarrow{\psi_\alpha} \\ H & \xrightarrow{i} & G & \xrightarrow{\pi} & G/H \end{array}$$

は可換である. $\psi_\alpha : G/H \to G/H$ は互いにホモトープであり，特に，$\psi_\alpha \simeq 1_{G/H}$

(2) $\mathrm{Im}\,\alpha \cap \mathrm{Im}\,\beta = \phi$ のとき，$\psi_{\alpha,\beta} : G \times G \to G$ は $\psi_{\alpha,\beta} : (G/H) \times (G/H) \to G/H$ を誘導し，G/H における $\psi_{\alpha,\beta}$ は互いにホモトープである.

(3) $(G/H, \psi_{\alpha,\beta})$ はホモトピー可換な H-群であり，$i : H \to G$ および $\pi : G \to G/H$ は H-写像である.

［証明］ (1) $\psi_\alpha(n) = \psi_\alpha | G(n) : G(n) \to G(\alpha(n))$ は $\psi_\alpha(n)(H(n)) \subset H(\alpha(n))$ をみたすから，$\psi_\alpha(n) : G(n)/H(n) \to G(\alpha(n))/H(\alpha(n))$ を誘導し，$\psi_\alpha(n+1) | G(n+1)/H(n+1) = \psi_\alpha(n)$. よって，$\psi_\alpha | G(n)/H(n) = \psi_\alpha(n)$ となる $\psi_\alpha : G/H \to G/H$ が存在して，(1)の図式は可換. $\psi_\alpha \simeq 1_{G/H}$ の証明は補題 3.3 の証明に従って行なう. ただし $w_i(t) \in SO(m_i) \subset H(m_i)$ であるから，$h_t(\{A\}) = \{w_1(t) \cdots w_k(t) \psi_\alpha(A)\}$ によってホモトピー $h_t : G/H \to G/H$ が与えられることに注意する.

(2), (3) の証明は定理 3.4 の証明と同様で，$\psi_{\alpha,\beta} : G/H \times G/H \to G/H$ を定義する式 $\psi_{\alpha,\beta}(\{A\}, \{A'\}) = \{\psi_\alpha(A) \psi_\beta(A')\}$ が代表元 $A, A' \in G(n)$ のとり方によらぬことに注意すればよい. $B, B' \in H(n)$ について，$\psi_\alpha(B)$ と $\psi_\beta(A')$ は可換であることから，$\psi_\alpha(AB) \psi_\beta(A'B') = \psi_\alpha(A) \psi_\beta(A') \psi_\alpha(B) \psi_\beta(B') \equiv \psi_\alpha(A) \psi_\beta(A')$ mod $H(\mathrm{Max}(\alpha(n), \beta(n)))$. (終)

第2の場合は，第1章，§2の射入

$$G(m) \times G(m) \longrightarrow G(2m), \qquad r : U(m) \longrightarrow SO(2m)$$
$$c' : Sp(m) \longrightarrow SU(2m)$$

からえられる $G(2m)/G(m) \times G(m)$, $SO(2m)/U(m)$, $SU(2m)/Sp(m)$ 等の極限であるが，これらの場合は通常の射入 $G(m) = G(m) \times 1 \subset G(m+k)$ と可換ではないから座標を入れかえる操作を行なう.

記号　$\tau_m=\psi_\alpha : G(2m)\to G(2m)$，ただし $\alpha : \boldsymbol{N}\to\boldsymbol{N}$ は $1\leq i\leq m$ について，$\alpha(i)=2i-1$，$\alpha(i+m)=2i$ をみたす単射．

$\tau=\alpha|\{1, 2, \cdots, 2m\}$ は $\{1, 2, \cdots, 2m\}$ の置換である．置換行列 $P_\tau=(\delta_{i\tau(j)})$ について，

$$\tau_m(A)=P_\tau AP_\tau^{-1},\quad A\in G(2m)$$

が成り立ち，τ_m は自己同型である．また，

$$\begin{aligned}(3.6)\quad &\tau_{m+1}((A\oplus a)\oplus(B\oplus b))=\tau_m(A\oplus B)\oplus a\oplus b, && A, B\in G(m),\quad a, b\in G(1)\\ &\tau_{m+1}(\boldsymbol{r}(A\oplus a))=\tau_m(\boldsymbol{r}(A))\oplus a\oplus a, && A\in U(m),\quad a\in O(1)\\ &\tau_{m+1}(\boldsymbol{c}'(A\oplus a))=\tau_m(\boldsymbol{c}'(A))\oplus a\oplus \bar{a}, && A\in Sp(m),\quad a\in U(1)\end{aligned}$$

$G(2m)$ の部分群 $K(m)$ は次のいずれかの場合とする：

$$\begin{aligned}&K(m)=\tau_m(G(m)\times G(m)), && G=SO,\ O,\ SU,\ U,\ Sp\\ &K(m)=\tau_m(\boldsymbol{r}(H(m))), && G=O,\ SO;\ H=U,\ SU\\ &K(m)=\tau_m(\boldsymbol{c}'(H(m))), && G=U,\ SU;\ H=Sp\end{aligned}$$

このとき，(3.6)によって，

$$K(m)=G(2m)\cap K(m+1)$$

が成り立つから，$G(2m)/K(m)\subset G(2m+2)/K(m+1)$ と考えることができる．

定義　$\cup G(2m)/K(m)$ に弱位相を与えたものを，$\boldsymbol{G}$ の $\boldsymbol{G}\times\boldsymbol{G}$ または $\boldsymbol{H}$ による**商空間**といい，次のように表わす：

$$\boldsymbol{BG}=\boldsymbol{G}/\boldsymbol{H}=\cup G(2m)/\tau_m(G(m)\times G(m))\ (\boldsymbol{G}\text{ の分類空間}),\quad \boldsymbol{H}\cong\boldsymbol{G}\times\boldsymbol{G},$$

$$\boldsymbol{G}/\boldsymbol{H}=\bigcup_m G(2m)/\tau_m(\boldsymbol{r}(H(m))),\quad \boldsymbol{G}=\boldsymbol{O}, \boldsymbol{SO};\quad \boldsymbol{H}\cong\boldsymbol{U}, \boldsymbol{SU}$$

$$\boldsymbol{G}/\boldsymbol{H}=\bigcup_m G(2m)/\tau_m(\boldsymbol{c}'(H(m))),\quad \boldsymbol{G}=\boldsymbol{U},\ \boldsymbol{SU};\quad \boldsymbol{H}\cong\boldsymbol{Sp}$$

上の場合に応じて，$\tau_m : G(m)\times G(m)\to G(2m)$, $\tau_m\circ\boldsymbol{r} : H(m)\to G(2m)$，$\tau_m\circ\boldsymbol{c}' : H(m)\to G(2m)$ を考えると，(3.6)によって，これらは無限次元における射入 $\boldsymbol{i_G}$, $\boldsymbol{i_R}$, $\boldsymbol{i_{C'}}$ および射影 $\boldsymbol{\pi}$ を誘導する：

$$\boldsymbol{G}\times\boldsymbol{G}\xrightarrow{\ i_G\ }\boldsymbol{G}\xrightarrow{\ \pi\ }\boldsymbol{BG}$$

$$\boldsymbol{H}\xrightarrow{\ i_R\ }\boldsymbol{G}\xrightarrow{\ \pi\ }\boldsymbol{G}/\boldsymbol{H}\qquad(\boldsymbol{G}=\boldsymbol{O},\ \boldsymbol{SO};\ \boldsymbol{H}=\boldsymbol{U},\ \boldsymbol{SU})$$

$$\boldsymbol{H}\xrightarrow{\ i_{C'}\ }\boldsymbol{G}\xrightarrow{\ \pi\ }\boldsymbol{G}/\boldsymbol{H}\qquad(\boldsymbol{G}=\boldsymbol{U},\ \boldsymbol{SU};\ \boldsymbol{H}=\boldsymbol{Sp})$$

定理 3.7　$\alpha, \beta : \boldsymbol{N}\to\boldsymbol{N}$ は単調増加とする．$\gamma=\alpha, \beta$ に対して，$\bar{\gamma} : \boldsymbol{N}\to\boldsymbol{N}$ を $\bar{\gamma}(2i-1)=2\gamma(i)-1$，$\bar{\gamma}(2i)=2\gamma(i)$ で定義する．$\boldsymbol{BG}$ の場合には，$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{G}\times\boldsymbol{G}$,

$BG=G/H$, $\psi_\alpha\times\psi_\alpha: G\times G\to G\times G$ を ψ_α とみなす.

(1)　$\psi_{\bar{\alpha}}: G\longrightarrow G$ は $\psi_{\bar{\alpha}}: G/H\longrightarrow G/H$ を誘導し，図式

$$\begin{array}{ccccc} H & \xrightarrow{i} & G & \xrightarrow{\pi} & G/H \\ \downarrow{\scriptstyle\psi_\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle\psi_{\bar{\alpha}}} & & \downarrow{\scriptstyle\psi_{\bar{\alpha}}} \\ H & \xrightarrow{i} & G & \xrightarrow{\pi} & G/H \end{array} \qquad (i=i_G,\ i_R \text{ または } i_{C'})$$

は可換である．$\psi_{\bar{\alpha}}: G/H\to G/H$ は互いにホモトープであり，特に，$\psi_{\bar{\alpha}}\simeq 1_{G/H}$

(2)　$\mathrm{Im}\,\alpha\cap\mathrm{Im}\,\beta=\phi$ のとき，$\psi_{\bar{\alpha},\bar{\beta}}: G\times G\to G$ は $\psi_{\bar{\alpha},\bar{\beta}}: (G/H)\times(G/H)\to G/H$ を誘導し，G/H における $\psi_{\bar{\alpha},\bar{\beta}}$ は互いにホモトープである．

(3)　$(G/H, \psi_{\bar{\alpha},\bar{\beta}})$ はホモトピー可換な H-群であり，$i: H\longrightarrow G$ および $\pi: G\longrightarrow G/H$ は H-写像である．

［証明］　定理 3.5 の証明と同様.　　(終)

今までに定義した無限次元空間のうち，

$$SU/SO,\ U/SO,\ U/O,\ SU/Sp,\ U/Sp,$$
$$BO,\ BU,\ BSp,\ SO/U,\ SO/SU,\ U/Sp,\ SU/Sp$$

は第3章，§6の(古典型)対称空間の極限として定義されるから，**無限次元対称空間**と総称する．これらの空間はコンパクト多様体の弱位相をもった和集合として定義されるから，CW-複体と同じホモトピー型をもつ(第2章，補題 6.4)．従って，これらの間の弱ホモトピー同値はホモトピー同値となる．

無限次元古典群の分類空間に関する H-写像

定理 3.5 で扱った射入 $H(n)\subset G(n)$ の誘導する

$$\rho: H(2n)/H(n)\times H(n)\longrightarrow G(2n)/G(n)\times G(n)$$

は τ_m と可換である．(3.6)を使えば，この ρ は写像

$$\boldsymbol{\rho}: BH=\bigcup_n H(2n)/\tau_n(H(n)\times H(n))\longrightarrow BG=\bigcup_n G(2n)/\tau_n(G(n)\times G(n))$$

を誘導する．特に，次の記号を使う．

$$\rho_C: BO\longrightarrow BU,\ BSO\longrightarrow BU,\ BSO\longrightarrow BSU$$
$$\rho_H: BU\longrightarrow BSp,\ BSU\longrightarrow BSp$$

同様に，$\varphi=\boldsymbol{r}: H(n)\subset G(2n)$ $(H=U, SU;\ G=O, SO)$, $\varphi=\boldsymbol{c}': H(n)\subset G(2n)$ $(H=Sp;\ G=U,\ SU)$ について，合成 $\tau_{2n}\circ(\tau_n\times\tau_n)\circ\sigma_n\circ\varphi\circ\tau_n^{-1}: H(2n)\to G(4n)$, $\sigma_n=I_n\oplus J_n\oplus I_n$，は

$$\boldsymbol{\rho}:\boldsymbol{BH}=\bigcup_n H(2n)/\tau_n(H(n)\times H(n))\longrightarrow \boldsymbol{BG}=\bigcup_n G(4n)/\tau_{2n}(G(2n)\times G(2n))$$

を誘導することがわかる．特に，次の記号を使う：

$$\boldsymbol{\rho_R}:\boldsymbol{BU}\longrightarrow\boldsymbol{BSO}\ (\to\boldsymbol{BO}),\ \ \boldsymbol{BSU}\longrightarrow\boldsymbol{BSO}\ (\to\boldsymbol{BO})$$

$$\boldsymbol{\rho_{C'}}:\boldsymbol{BSp}\longrightarrow\boldsymbol{BSU}(\to\boldsymbol{BU})$$

上の $\varphi: H(n)\subset G(2n)$ は $\varphi(G(n))\subset G(n)\times G(n)$ をみたすから，$\tau_n\circ\varphi$ は

$$\boldsymbol{j}:\boldsymbol{H/G}=\bigcup_n H(n)/G(n)\longrightarrow\boldsymbol{BG}=\bigcup_n G(2n)/\tau_n(G(n)\times G(n))$$

を誘導することが，(3.6)からわかる．特に，

$$\boldsymbol{j_C}:\boldsymbol{U/O}\longrightarrow\boldsymbol{BO},\ \ \boldsymbol{U/SO}\ (\boldsymbol{SU/SO})\longrightarrow\boldsymbol{BSO}$$

$$\boldsymbol{j_H}:\boldsymbol{Sp/U}\longrightarrow\boldsymbol{BU},\ \ \boldsymbol{Sp/SU}\longrightarrow\boldsymbol{BSU}$$

次に，射入 $O(2n)\subset U(2n)$ を $\boldsymbol{r}(U(n))$ で考える．$\eta_n=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} I_n & iI_n \\ iI_n & I_n\end{pmatrix}$ とおけば，$A\in U(n)\Longrightarrow\eta_n(\boldsymbol{r}A)\eta_n{}^{-1}=A\oplus\overline{A}$ (第1章，(2.7) (3))．故に，$j_n: O(2n)\to U(2n)\Longleftrightarrow j_n(A)=\eta_nA\eta_n{}^{-1}$，とおけば，$\tau_n\circ j_n\circ\tau_n{}^{-1}$ は $O(2n)/\tau_n(\boldsymbol{r}U(n))\to U(2n)/\tau_n(U(n)\times U(n))$，従って，その極限として

$$\boldsymbol{j_R}:\boldsymbol{O/U}\quad(\boldsymbol{SO/U})\longrightarrow\boldsymbol{BU},\qquad\boldsymbol{SO/SU}\longrightarrow\boldsymbol{BSU}$$

が定義できる．ここで，$\tau_{n+1}[\eta_{n+1}(\tau_{n+1}^{-1}(A\oplus I_2))]\eta_{n+1}^{-1}=\tau_n[\eta_n(\tau_n{}^{-1}A)\eta_n{}^{-1}]\oplus I_2$ が(3.6)の代わりに使われる．同様なことを，射入 $U(2n)\subset Sp(2n)$，$\boldsymbol{c}'(Sp(n))$ および $\eta_n=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} I_n & jI_n \\ iI_n & -kI_n\end{pmatrix}$，$j_n: U(2n)\longrightarrow Sp(2n)\Longleftrightarrow j_n(A)=\eta_nA\eta_n{}^{-1}$，について考えることによって，写像

$$\boldsymbol{j_{C'}}:\boldsymbol{U/Sp}\ (\boldsymbol{SU/Sp})\longrightarrow\boldsymbol{BSp}$$

が定義される．定理 3.5, 定理 3.7 と同様に次が成り立つ：

(3.8) $\boldsymbol{\rho_C}$，$\boldsymbol{\rho_H}$，$\boldsymbol{\rho_R}$，$\boldsymbol{\rho_{C'}}$，$\boldsymbol{j_C}$，$\boldsymbol{j_H}$，$\boldsymbol{j_R}$，$\boldsymbol{j_{C'}}$ は H-写像である．

ここで，$\boldsymbol{BH}$ と $BH(n)$ を関係づけておく必要があろう．$BH(n)$ は一応 $\bigcup_N H(n+N)/H(n)\times H(N)$ で定義できるが，$H(n)\subset G(an)$ のとき $\bigcup_N G(an+N)/H(n)\times G(N)$ としても定義できて，この両者は自然な写像によってホモトピー同値である(第2章，補題 6.4, (6.3))．$BG(n)$ から $\boldsymbol{BG}$ への自然な写像

$$i: BG(n)=\bigcup_N G(n+N)/G(n)\times G(N)\longrightarrow\boldsymbol{BG}=\bigcup_n G(2n)/\tau_n(G(n)\times G(n))$$

は，$\alpha:\boldsymbol{N}\to\boldsymbol{N}$ を $\alpha(i)=2i-1\ (1\leq i\leq n)$，$\alpha(i)=2(i-n)\ (i>n)$ とし，ψ_α：$G(n+N)\to G(n+2N)$ から誘導されるものとする．

$\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{\rho_C},\boldsymbol{\rho_H}$ のときは $a=1$，　$\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{\rho_R},\boldsymbol{\rho_{C'}}$ のときは $a=2$ とおいて，次の可換な

図式がえられる：

(3.9)

$$\begin{array}{ccccc} BH(n)=\bigcup_N \dfrac{H(n+N)}{H(n)\times H(N)} & \longrightarrow \bigcup_N \dfrac{G(an+N)}{H(an)\times G(N)} & \xrightarrow{\rho} & BG(n)=\bigcup_N \dfrac{G(an+N)}{G(an)\times G(N)} \\ \downarrow i & & & \downarrow i \\ \boldsymbol{BH}=\bigcup_n H\,2n)/\tau_n(H(n)\times H(n)) & & \xrightarrow{\boldsymbol{\rho}} & \boldsymbol{BG}=\bigcup_n G(2an)/\tau_{an}(G(an)\times G(an)) \end{array}$$

$\boldsymbol{j}:\boldsymbol{G/H}\to\boldsymbol{BH}$ については，$\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j_C},\boldsymbol{j_H}$ のときは $a=1$，$\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j_R},\boldsymbol{j_{C'}}$ のときは $a=2$ とおいて，次のホモトピー可換な図式がえられる：

(3.9)′

$$\begin{array}{ccccc} G(an)/H(n) & \xrightarrow{i} \bigcup_N \dfrac{G(an+N)}{H(n)\times G(N)} \xleftarrow{\simeq} & BH(n)=\bigcup_N \dfrac{H(n+N)}{H(n)\times H(N)} \\ \downarrow i & & \downarrow i \\ \boldsymbol{G/H}=\bigcup G(an)/H(n) & \xrightarrow{\boldsymbol{j}} & \boldsymbol{BH}=\bigcup H(2n)/\tau_n(H(n)\times H(n)) \end{array}$$

ここで，$\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j_R}$，$\boldsymbol{j_{C'}}$ のときは $G(2n)/H(n)$ は $G(2n)/\tau_n(\varphi H(n))$ であるべきであるが，$G(2n)/H(n)=G(2n)/\varphi H(n)$ と本質的な差はない．

定義　$\sigma_{G(n)}:G(n)\longrightarrow \Omega BG(n) \Longleftrightarrow A\in G(n)$，$t\in I$ に対して，$\sigma_{G(n)}(A)(t)=\{S_{t/2}(n)(A\oplus I_n)S_{t/2}(n)^{-1}\}\in G(2n)/G(n)\times G(n)\subset BG(n)$，

$$\boldsymbol{\sigma_G}:\boldsymbol{G}\longrightarrow \Omega(\boldsymbol{BG})\Longleftrightarrow \boldsymbol{\sigma_G}(A)(t)=\tau_n(\sigma_{G(n)}(A)(t))$$
$$\in G(2n)/\tau_n(G(n)\times G(n))\subset \boldsymbol{BG}$$

ただし，$S_t(n)=\begin{pmatrix}\cos\pi t I_n & -\sin\pi t I_n \\ \sin\pi t I_n & \cos\pi t I_n\end{pmatrix}\in SO(2n)\subset G(2n)$

$\boldsymbol{BG}$ における懸垂準同型 $\sigma:H^{i+1}(\boldsymbol{BG};\ R)\to H^i(\boldsymbol{G};\ R)$ を合成 $\boldsymbol{\sigma_G}^*\circ\sigma:H^{i+1}(\boldsymbol{BG};\ R)\to H^i(\Omega\boldsymbol{BG};\ R)\to H^i(\boldsymbol{G};\ R)$ で定義する．

定理 3.10　(1)　$\sigma_{G(n)}$，$\boldsymbol{\sigma_G}$ は(弱)ホモトピー同値．$\boldsymbol{\sigma_G}$ は H-写像である．

(2)　次の図式は可換である：

$$\begin{array}{ccc} G(n) & \xrightarrow{\sigma_{G(n)}} & \Omega BG(n) \\ \downarrow i & & \downarrow \Omega i \\ \boldsymbol{G} & \xrightarrow{\boldsymbol{\sigma_G}} & \Omega\boldsymbol{BG} \end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc} H^{i+1}(\boldsymbol{BG};\ R) & \xrightarrow{\sigma} & H^i(\boldsymbol{G};\ R) \\ \downarrow i^* & & \downarrow i^* \\ H^{i+1}(BG(n);\ R) & \xrightarrow{\sigma} & H^i(G(n);\ R) \end{array}$$

［証明］　(1)　右の可換図式がえられるから，$\sigma_{G(n)}$ は弱ホモトピー同値．$\boldsymbol{\sigma_G}$ についても同様．後半は定理 3.5(3) の証明と同様．

$$\begin{array}{ccc} \pi_{i+1}(BG(n)) & \xrightarrow[\cong]{\Delta} & \pi_i(G(n)) \\ & \underset{\cong}{\overset{\Delta}{\searrow}} & \downarrow \sigma_{G(n)*} \\ & & \pi_i(\Omega BG(n)) \end{array}$$

(2)は容易．　　　　　　　　　　　　　　　　(終)

無限次元対称空間のコホモロジー

補題 3.11　以下の射入 i と整数 N について，i の誘導するホモトピー群 $\pi_j(\ \ )$，ホモロジー群 $H_j(\ \ ;R)$ およびコホモロジー群 $H^j(\ \ ;R)$ の準同型は $j<N$ のとき同型，$j=N$ のときはホモトピー群，ホモロジー群については全射，コホモロジー群については単射である．

(1)　$i:G(n)\to \boldsymbol{G}$, $N=d(n+1)-2$ ($d=1$ ($G=O$, SO), $d=2$ ($G=SU$, U), $d=4$ ($G=Sp$))

(2)　$i:G(n)/H(n)\to \boldsymbol{G/H}$, $N=d(n+1)-1$ ($d=1$ ($G=U$, SU; $H=O, SO$), $d=2$ ($G=Sp$; $H=U$, SU))

(3)　$i=\tau_n:G(2n)/H(n)\to \boldsymbol{G/H}$, $N=d(2n+1)-2$ ($d=1$ ($G=O$, SO; $H=U$, SU), $d=2$ ($G=U$, SU; $H=Sp$))

(4)　$i:BG(n)\to \boldsymbol{BG}$, $N=d(n+1)-1$ (d は(1)と同様.)

［証明］　ホモトピー群について示せば，(コ)ホモロジー群については定理1.12(1)より容易にわかる．(3.1)によって，$\pi_i(\boldsymbol{G})$ は十分大きい m について $\pi_i(G(m))$ と同型．G/H についても同様．従って，補題は $\boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{G/H}$ を $G(n+1)$, $G(n+1)/H(n+1)$, $G(2n+2)/H(n+1)$ でおきかえて示せばよい．(1)は(2.8)より明らか．定理1.22により，(1)$\Longrightarrow$(4)．

(2)を示すには可換かつ完全な図式

$$
\begin{array}{ccccc}
\pi_j(H(m)) & \longrightarrow & \pi_j(G(m)) & \longrightarrow & \pi_j(G(m)/H(m)) \\
\downarrow{\scriptstyle i_{H*}} & & \downarrow{\scriptstyle i_{G*}} & & \downarrow{\scriptstyle i_*} \\
\pi_j(H(m+1)) & \longrightarrow & \pi_j(G(m+1)) & \longrightarrow & \pi_j(G(m+1)/H(m+1))
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccc}
\xrightarrow{\partial_*} & \pi_{j-1}(H(m)) & \longrightarrow & \pi_{j-1}(G(m)) \\
 & \downarrow{\scriptstyle i_{H*}} & & \downarrow{\scriptstyle i_{G*}} \\
\xrightarrow{\partial_*} & \pi_{j-1}(H(m+1)) & \longrightarrow & \pi_{j-1}(G(m+1))
\end{array}
$$

に5-補題を使えばよい．(3)についても同様．　(終)

この補題によって，第3章の結果を無限次元の場合に拡張できる．その際，補題の同型で対応する元を同じ記号で表わす．また無限次元における結果を有限次元で議論することができる．補題の同型(1)は Hopf 代数の同型であることにも注意する．

第3章の 定理 6.5, 定理 6.6 および補題 2.16 より,

(3.12)　次において, 各生成元は原始的である：

$$H^*(\boldsymbol{U})=\Lambda(e_1,\ e_3,\ \cdots,\ e_{2n-1},\ \cdots),\quad H^*(\boldsymbol{SU})=\Lambda(e_3,\ e_5,\ \cdots,\ e_{2n-1},\ \cdots)$$

$$H^*(\boldsymbol{Sp})=\Lambda(e_3,\ e_7,\ \cdots,\ e_{4n-1},\ \cdots)$$

$$H^*(\boldsymbol{SO};\ \boldsymbol{k})=\Lambda(e_3,\ e_7,\ \cdots,\ e_{4n-1},\ \cdots)\qquad (\boldsymbol{k}：標数 \neq 2 の体)$$

$$H^*(\boldsymbol{SO};\ \boldsymbol{Z}_2)=\boldsymbol{Z}_2[e_1,\ e_3,\ e_5,\ \cdots,\ e_{2n-1},\ \cdots]\quad (e_{2i}=e_i{}^2)$$

定理 2.17 をこれらに適用して,

(3.12)*　$H_*(\boldsymbol{U})=\Lambda(e_1{}^*,\ e_3{}^*,\ \cdots,\ e_{2n-1}{}^*,\ \cdots)$

$$H_*(\boldsymbol{SU})=\Lambda(e_3{}^*,\ e_5{}^*,\ \cdots,\ e_{2n-1}{}^*,\ \cdots)$$

$$H_*(\boldsymbol{Sp})=\Lambda(e_3{}^*,\ e_7{}^*,\ \cdots,\ e_{4n-1}{}^*,\ \cdots)$$

$$H_*(\boldsymbol{SO};\ \boldsymbol{k})=\Lambda(e_3{}^*,\ e_7{}^*,\ \cdots,\ e_{4n-1}{}^*,\ \cdots)\qquad (\boldsymbol{k}：標数 \neq 2 の体)$$

$$H_*(\boldsymbol{SO};\ \boldsymbol{Z}_2)=\Lambda(e_1{}^*,\ e_2{}^*,\ e_3{}^*,\ \cdots,\ e_{n-1}{}^*,\ \cdots)$$

定理 2.8, 定理 2.11, 補題 2.20, 系 2.21 より,

(3.13)　$H_*(\Omega\boldsymbol{SU})=\boldsymbol{Z}[e_2,\ e_4,\ e_6,\ \cdots,\ e_{2n},\ \cdots]$

$$H_*(\Omega\boldsymbol{Sp})=\boldsymbol{Z}[e_2,\ e_6,\ \cdots,\ e_{4n-2},\ \cdots]$$

$$H_*(\Omega_0\boldsymbol{SO};\ \boldsymbol{k})=\boldsymbol{k}[e_2,\ e_6,\ \cdots,\ e_{4n-2},\ \cdots]\qquad (\boldsymbol{k}：標数 \neq 2 の体)$$

(3.13)*　$H^*(\Omega_0\boldsymbol{SO};\ \boldsymbol{Z}_2)=\boldsymbol{Z}_2[e_2,\ e_6,\ \cdots,\ e_{4n-2},\ \cdots]$

(3.14)　$H_*(\Omega_0\boldsymbol{SO})$ は有限型自由でその Poincaré 多項式は $\prod_{n\geq 1}\dfrac{1}{1-t^{4n-2}}$.

補題 3.15　$\Omega\boldsymbol{i}_C：\Omega_0\boldsymbol{SO}\to\Omega\boldsymbol{SU}$ について,

$$\Omega\boldsymbol{i}_C{}^*(H^+(\Omega\boldsymbol{SU}))\subset 2H^+(\Omega_0\boldsymbol{SO})$$

［証明］ 系 2.21 より $H_*(\Omega_0\boldsymbol{SO};\ \boldsymbol{Z}_2)=\Lambda(e_2{}^*,\ e_4{}^*,\ \cdots,\ e_{2n}{}^*,\ \cdots)$, $\Omega\boldsymbol{i}_{C*}：H_*(\Omega_0\boldsymbol{SO};\ \boldsymbol{Z}_2)\longrightarrow H_*(\Omega\boldsymbol{SU};\ \boldsymbol{Z}_2)=\boldsymbol{Z}_2[e_2,\ e_4,\ \cdots,\ e_{2n},\ \cdots]$ を考えるとき, $(\Omega\boldsymbol{i}_{C*}(e_{2n}))^2=\Omega\boldsymbol{i}_{C*}(e_{2n}{}^2)=0\Longrightarrow\Omega\boldsymbol{i}_{C*}(e_{2n})=0\Longrightarrow\Omega\boldsymbol{i}_{C*}(H_+(\Omega_0\boldsymbol{SO};\ \boldsymbol{Z}_2))=0$. 双対性により, $\Omega\boldsymbol{i}_C{}^*(H^+(\Omega\boldsymbol{SU};\ \boldsymbol{Z}_2))=0\Longrightarrow\Omega\boldsymbol{i}_C{}^*(H^+(\Omega\boldsymbol{SU}))\equiv 0 \pmod 2$.　(終)

第3章, 定理 6.7 より

(3.16)　$H^*(\boldsymbol{U}/\boldsymbol{Sp})=\Lambda(e_1,\ e_5,\ \cdots,\ e_{4n-3},\ \cdots)$

$$H^*(\boldsymbol{U}/\boldsymbol{SO};\ \boldsymbol{k})=\Lambda(e_1,\ e_5,\ \cdots,\ e_{4n-3},\ \cdots)\quad (\boldsymbol{k}：標数 \neq 2 の体)$$

$$H^*(\boldsymbol{U}/\boldsymbol{SO};\ \boldsymbol{k})=\Lambda(e_1,\ e_2,\ \cdots,\ e_n,\ \cdots)\qquad (\boldsymbol{k}：標数 2 の体)$$

ここで, $\boldsymbol{U}$ を $\boldsymbol{SU}$ でおきかえたときは e_1 をとればよい. また e_{4n-3} は $H^*(\boldsymbol{U})$

の原始的な生成元 e_{4n-3} の像にとれるから,

(3.16)*　$H_*(\boldsymbol{U/Sp})=\Lambda(e_1{}^*,\ e_5{}^*,\ \cdots,\ e_{4n-3}{}^*,\ \cdots)$

$H_*(\boldsymbol{U/SO};\ \boldsymbol{k})=\Lambda(e_1{}^*,\ e_5{}^*,\ \cdots,\ e_{4n-1}{}^*,\ \cdots)$　($\boldsymbol{k}$：標数$\neq 2$の体)

第3章, 定理 6.9 (2) の結果 $H^*(U(2n)/U(n)\times U(n))=\boldsymbol{Z}[c_1,\ \cdots,\ c_n,\ c_1',\ \cdots,\ c_n']/(\sum_{i+j=k}c_ic_j')$ の関係式によって, c_i' は c_i で書き直され, 次数 $\leq 2n$ でこの環は $\boldsymbol{Z}[c_1,\ \cdots,\ c_n]$と同型である. さらに自然な対応 $U(2n)/U(n)\times U(n)\longrightarrow BU(n)=\bigcup_N U(n+N)/U(n)\times U(N)$ によって, 上の c_i は $c_i\in H^{2i}(BU(n))$ の像となっている. このことから, $U(2n+2)/U(n+1)\times U(n+1)$ における c_i $(i\leq n)$ は $U(2n)/U(n)\times U(n)$ の c_i に対応していることがわかる. U を SU, Sp, O, BO におきかえても同様で, 第3章の結果は次のように書き直される：

(3.17)　$H^*(\boldsymbol{BU})=\boldsymbol{Z}[c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_n,\ \cdots],\qquad \mu^*(c_i)=\sum_{j+k=i}c_j\otimes c_k$

$H^*(\boldsymbol{BSp})=\boldsymbol{Z}[q_1,\ q_2,\ \cdots,\ q_n,\ \cdots],\qquad \mu^*(q_i)=\sum_{j+k=i}q_j\otimes q_k$

$H^*(\boldsymbol{BSO};\ \boldsymbol{k})=\boldsymbol{k}[p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_n,\ \cdots],\quad \mu^*(p_i)=\sum_{j+k=i}p_j\otimes p_k$

($\boldsymbol{k}$ は標数 $\neq 2$ の体)

$H^*(\boldsymbol{BO};\ \boldsymbol{k})=\boldsymbol{k}[w_1,\ w_2,\ \cdots,\ w_n,\ \cdots],\quad \mu^*(w_i)=\sum_{j+k=i}w_j\otimes w_k$

($\boldsymbol{k}$ は標数 $=2$ の体)

定理 2.18 により,

(3.17)*　(3.15) の結果はホモロジー環においても形式的に同じである. ただし, 生成元は, $(c_1{}^n)^*$, $(q_1{}^n)^*$, $(p_1{}^n)^*$, $(w_1{}^n)^*$ をとるものとする.

注意　$H^*(\boldsymbol{BSO};\ \boldsymbol{Z}_2)=\boldsymbol{Z}_2[w_2,\ \cdots,\ w_n,\ \cdots]$ の双対として,

$H_*(\boldsymbol{BSO};\ \boldsymbol{Z}_2)=\boldsymbol{Z}_2[w_2{}^*,\ w_3{}^*,\ (w_2{}^2)^*,\ (w_2w_3)^*,\ \cdots]$

第3章の定理 6.9, 定理 6.11 より

(3.18)　$H^*(\boldsymbol{Sp/U})=\boldsymbol{Z}[c_1,c_2,\cdots,c_n,\cdots]/(\sum_{i+j=k}(-1)^ic_ic_j)=\Delta(c_1,c_2,\cdots,c_n,\cdots)$

$H^*(\boldsymbol{Sp/SU})=H^*(\boldsymbol{Sp/U})/(c_1)=\Delta(c_2,\ c_3,\ \cdots,\ c_n,\ \cdots)$

$H^*(\boldsymbol{SO/U})=\boldsymbol{Z}[e_2,\ e_4,\ \cdots,\ e_{2n},\ \cdots]/(e_{4k}+\sum_{i=1}^{2k-1}(-1)^ie_{2i}e_{4k-2i})$

$=\Delta(e_2,\ e_4,\ \cdots,\ e_{2n},\ \cdots)$　(自由加群)

ただし, c_i は $\boldsymbol{j_H}^*$ による c_i の像, $2e_{2i}=\boldsymbol{j_R}^*(c_i)$.

§4　ベクトルバンドルと KF-群

体 F 上のベクトルバンドル

位相空間 X を底空間とする $\boldsymbol{F}$ $(=\boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{H})$ 上の m 次元ベクトルバンドル

$$\xi=(E_\xi,\ p,\ X,\ \boldsymbol{F}^m,\ GL(m,\ \boldsymbol{F}))$$

は，局所自明ファイバー空間 $(E_\xi,\ p,\ X,\ \boldsymbol{F}^m)$ で，各ファイバー $\boldsymbol{F}_x{}^n$ が $\boldsymbol{F}$ 上のベクトル空間の構造をもち，ベクトルの和および $\boldsymbol{F}$ の右作用が連続なものであるということができる(第2章，定理2.2)．$n=\dim\xi$ を ξ の**次元**という．

上の ξ の外に n 次元ベクトルバンドル $\eta=(E_\eta,\ p',\ Y,\ \boldsymbol{F}^n,\ GL(n,\ \boldsymbol{F}))$ を考えるとき，ξ と η の**直積**

$$\xi\times\eta=(E_\xi\times E_\eta,\ \ p\times p',\ \ X\times Y,\ \ \boldsymbol{F}^{m+n},\ \ GL(m+n,\ \boldsymbol{F}))$$

は明らかに $(m+n)$ 次元ベクトルバンドルである．

ここで，$X=Y$ のときに，対角写像 $d: X\to X\times X$ で誘導されるベクトルバンドルを ξ と η の **Whitney 和**といい．

$$\xi\oplus\eta=d^\#(\xi\times\eta)=(E_{\xi\oplus\eta},\ p'',\ X,\ \boldsymbol{F}^{m+n},\ GL(m+n,\ \boldsymbol{F}))$$

で表わす．

この Whitney 和 $\xi\oplus\eta$ は，E_ξ と E_η の x 上のファイバー $\boldsymbol{F}_x{}^m$ と $\boldsymbol{F}_x{}^n$ の直和 $\boldsymbol{F}_x{}^m\oplus\boldsymbol{F}_x{}^n$ を集めて構成したものとみることができる．

記号　$\varepsilon_{\boldsymbol{F}}{}^k=$ 自明な k 次元ベクトルバンドル $(X\times\boldsymbol{F}^k,\ p,\ X,\ \boldsymbol{F}^k,\ GL(k,\ \boldsymbol{F}))$．

一般に，ベクトル空間の間の直和，テンソル積，共役，Hom，外積，等の構成に対応して，ベクトルバンドルの間の直和 (Whitney 和)，テンソル積，共役，Hom，外積，等を構成することができる．この構成の基礎となるのは，第2章，定理2.1であって，適当な座標変換が構成できればよい．

この考えに従って，Whitney 和，テンソル積，共役を以下に定義しよう．

底空間 X と座標近傍 $\{U_\alpha\}$ は共通にとるものとし，

$\boldsymbol{F}$ 上の m 次元ベクトルバンドル ξ の座変標換を $g_{\beta\alpha}$

$'\boldsymbol{F}$ 上の n 次元ベクトルバンドル η の座標変換を $'g_{\beta\alpha}$

とする．

Whitney 和 $\xi\oplus\eta$ は $\boldsymbol{F}={}'\boldsymbol{F}$ のときに定義され，$\xi\oplus\eta$ の座標変換 $\bar{g}_{\beta\alpha}$ は $\bar{g}_{\beta\alpha}(x)$

$=g_{\beta\alpha}(x)\oplus' g_{\beta\alpha}(x)\in GL(m+n,\ \boldsymbol{F})$ で与えられ，$\xi\oplus\eta$ は $\boldsymbol{F}$ 上の $(m+n)$ 次元ベクトルバンドルである．

$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{R}$ または $'\boldsymbol{F}=\boldsymbol{R}$ のとき，**$\boldsymbol{R}$ 上のテンソル積** $\xi\otimes_{\boldsymbol{R}}\eta$ が $\boldsymbol{F}^m\otimes_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{R}^n\cong\boldsymbol{F}^{mn}$, $\boldsymbol{R}^m\otimes_{\boldsymbol{R}}{}'\boldsymbol{F}^n\cong{}'\boldsymbol{F}^{mn}$ に対応して定義され $\boldsymbol{F}$ または $'\boldsymbol{F}$ 上の mn 次元ベクトルバンドルとなる．$\boldsymbol{F}^m$ の基底$\{\boldsymbol{e}_1,\ \cdots,\boldsymbol{e}_m\}$, $'\boldsymbol{F}^m$ の基底$\{'\boldsymbol{e}_1,\ \cdots,{}'\boldsymbol{e}_n\}$に対して $\boldsymbol{F}^m\otimes_{\boldsymbol{R}}{}'\boldsymbol{F}^n$ の基底$\{\boldsymbol{e}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{e}_{mn}\}$を $\boldsymbol{e}_{(n-1)i+j}=\boldsymbol{e}_i\otimes'\boldsymbol{e}_j$ で定めるとき，$\xi\otimes_{\boldsymbol{R}}\eta$ の座標変換 $\bar{g}_{\beta\alpha}$ は $\bar{g}_{\beta\alpha}(x)=g_{\beta\alpha}(x)\otimes' g_{\beta\alpha}(x)$ で与えられる．ただし，$A=(a_{ij})\in GL(m,\ \boldsymbol{F})$, $B=(b_{kl})\in GL(n,\ '\boldsymbol{F})$ に対して，**行列のテンソル積** $A\otimes B$ は次式で定義される：

$$A\otimes B=(c_{st})\in GL(mn,\ \boldsymbol{F}\otimes_{\boldsymbol{R}}{}'\boldsymbol{F})\Longleftrightarrow c_{(n-1)i+k,\,(n-1)j+l}=a_{ij}b_{kl}$$

$\boldsymbol{F}={}'\boldsymbol{F}=\boldsymbol{C}$ のとき，全く同様に **$\boldsymbol{C}$ 上のテンソル積** $\xi\otimes_{\boldsymbol{C}}\eta$ が定義される．

$\boldsymbol{C}$ 上のベクトルバンドル ξ の**共役ベクトルバンドル** $\bar{\xi}$ はその座標変換 $\bar{g}_{\beta\alpha}$ を $\bar{g}_{\beta\alpha}(x)=\overline{g_{\beta\alpha}(x)}$ で与えてえられる．

次の同値関係が成り立つ：

(4.1)　$\xi\oplus\eta\equiv\eta\oplus\xi$, $(\xi\oplus\eta)\oplus\zeta\equiv\xi\oplus(\eta\oplus\zeta)$

$\boldsymbol{C}$ 上で，$\overline{(\xi\oplus\eta)}\equiv\bar{\xi}\oplus\bar{\eta}$, $\bar{\bar{\eta}}\equiv\eta$

(4.2)　テンソル積が意味のある範囲で，

$\xi\otimes\eta\equiv\eta\otimes\xi$, $(\xi\otimes\eta)\otimes\zeta\equiv\xi\otimes(\eta\otimes\zeta)$, 　$(\xi\oplus\eta)\otimes\zeta\equiv(\xi\otimes\zeta)\oplus(\eta\otimes\zeta)$

$\boldsymbol{C}$ 上で，$\overline{\xi\otimes_{\boldsymbol{C}}\eta}=\bar{\xi}\otimes_{\boldsymbol{C}}\bar{\eta}$

係数体の拡大 $\boldsymbol{R}\subset\boldsymbol{C}\subset\boldsymbol{H}$ に対応して，中への同型 $GL(n,\ \boldsymbol{R})\xrightarrow{c}GL(n,\ \boldsymbol{C})\xrightarrow{q}GL(n,\ \boldsymbol{H})$ を考えることによって，$\boldsymbol{R}$ 上のベクトルバンドル ξ の**複素化** $\xi_{\boldsymbol{C}}$ ($\boldsymbol{C}$ 上の同次元ベクトルバンドル), $\boldsymbol{C}$ 上のベクトルバンドル ξ の**四元数化** $\xi_{\boldsymbol{H}}$ ($\boldsymbol{H}$ 上の同次元のベクトルバンドル)がえられる．$\xi_{\boldsymbol{C}}=\xi\otimes_{\boldsymbol{R}}\varepsilon_{\boldsymbol{C}}{}^1$ と考えてよい．逆に，$\boldsymbol{C}^n=\boldsymbol{R}^n+\boldsymbol{i}\boldsymbol{R}^n$ とみなすことによってえられる $\boldsymbol{r}:GL(n,\ \boldsymbol{C})\hookrightarrow GL(2n,\ \boldsymbol{R})$ を考えることによって，$\boldsymbol{C}$ 上の m 次元ベクトルバンドル ξ の**実化** $\xi_{\boldsymbol{R}}$ ($\boldsymbol{R}$ 上の $2m$ 次元ベクトルバンドル), $\boldsymbol{H}^n=\boldsymbol{C}^n+\boldsymbol{j}\boldsymbol{C}^n$ とみなすことによってえられる $\boldsymbol{c}':GL(n,\ \boldsymbol{H})\to GL(2n,\ \boldsymbol{C})$ を考えることによって，$\boldsymbol{H}$ 上の m 次元ベクトルバンドル ξ に対して $\boldsymbol{C}$ 上の $2m$ 次元ベクトルバンドル $\xi_{\boldsymbol{C}'}$ がえられる．これらについては次が成り立つ：

(4.3)　(1)　$(\xi\oplus\eta)_{\boldsymbol{C}}\equiv\xi_{\boldsymbol{C}}\oplus\eta_{\boldsymbol{C}}$, 　$(\xi\oplus\eta)_{\boldsymbol{H}}\equiv\xi_{\boldsymbol{H}}\oplus\eta_{\boldsymbol{H}}$

$(\xi\oplus\eta)_{\boldsymbol{R}}\equiv\xi_{\boldsymbol{R}}\oplus\eta_{\boldsymbol{R}}$, 　$(\xi\oplus\eta)_{\boldsymbol{C}'}\equiv\xi_{\boldsymbol{C}'}\oplus\eta_{\boldsymbol{C}'}$

(2) $\xi_C \otimes_C \eta_C \equiv (\xi \otimes_R \eta)_C$

$\xi_C \otimes_R \eta \equiv (\xi \otimes_R \eta)_C$, $\xi_H \otimes_R \eta \equiv (\xi \otimes_R \eta)_H$

$\xi_R \otimes_R \eta \equiv (\xi \otimes_R \eta)_R$, $\xi_{C'} \otimes_R \eta \equiv (\xi \otimes_R \eta)_{C'}$

第1章の(2.3), (2.4)(3), (2.13), (2.14)(3)を用いて, 次のこともわかる：

(4.4) (1) $(\xi_C)_R \equiv \xi \oplus \xi$, $(\xi_R)_C \equiv \xi \oplus \bar{\xi}$

(2) $(\xi_H)_{C'} \equiv \xi \oplus \bar{\xi}$, $(\xi_{C'})_H \equiv \xi \oplus \xi$

KF-群

記号 $\mathrm{Vect}_F(X) = \{$位相空間 X を底空間とする F 上のベクトルバンドルの同値類$\}$

$\mathrm{Vect}_F(X)$ の元 ξ, η の Whitney 和 $\xi \oplus \eta$ は可換かつ結合的である((4.1)). 0を0次元ベクトルバンドル $(X, 1_X, X, F^0 = \{0\}, U(0, F) = \{e\})$ の類とするとき, $\xi \oplus 0 = 0 \oplus \xi = \xi$ である. 従って, $\mathrm{Vect}_F(X)$ は $\oplus$ に関して可換半群となる. Grothendieck の構成法によって, $\mathrm{Vect}_F(X)$ を可換群にしたものを $KF(X)$ で表わし, X の KF-群という. 即ち,

定義 $KF(X) = F(\mathrm{Vect}_F(X)) / (\xi \oplus \eta - \xi - \eta)$, ただし,

$F(\mathrm{Vect}_F(X))$ は $\mathrm{Vect}_F(X)$ を基底にもつ自由アーベル群,

$(\xi \oplus \eta - \xi - \eta)$ はすべての $\xi, \eta \in \mathrm{Vect}_F(X)$ について元 $\xi \oplus \eta - \xi - \eta$ 全体で生成される部分群.

個々の F について, 習慣上次の記号が使われる：

記号 $K(X) = KU(X) = KC(X)$, $KO(X) = KR(X)$, $KSp(X) = KH(X)$

また, $G = O, U, Sp$ について $KG(X)$ と表わすこともある.

ベクトルバンドルのテンソル積は結合的かつ Whitney 和に関して分配的である. 1_F を自明な1次元ベクトルバンドル $\varepsilon_F{}^1 = (X \times F, p, X, F, U(1, F))$ の類とするとき, $\xi \otimes_R 1_R = 1_R \otimes_R \xi = \xi$, C 上で $\xi \otimes_C 1_C = 1_C \otimes_C \xi = \xi$ である. このテンソル積は自然に KF-群に拡張され, 次が成り立つ.

(4.5) (1) $F = R, C$ のとき, $KF(X)$ はテンソル積 $\otimes_F : KF(X) \times KF(X) \to KF(X)$ に関して, 単位元 1_F をもつ可換環をなす.

(2) テンソル積 $\otimes_R : KR(X) \times KF(X) \to KF(X)$, $KF(X) \times KR(X) \to KF(X)$ に関して $KF(X)$ は $KR(X)$-両側加群で, 右作用と左作用は一致する.

$\boldsymbol{r}(\xi)=\xi_{\boldsymbol{R}}$, $\boldsymbol{c}(\xi)=\xi_{\boldsymbol{C}}$, $\boldsymbol{c}'(\xi)=\xi_{\boldsymbol{C}'}$, $\boldsymbol{q}(\xi)=\xi_{\boldsymbol{H}}$, $\boldsymbol{t}(\xi)=\bar{\xi}$ とおけば，(4.3) (1), (4.1) によって，これらは$\boldsymbol{KF}$-群における次の準同型をひきおこす：

$$\boldsymbol{r}: K(X) \longrightarrow KO(X), \quad \boldsymbol{c}: KO(X) \longrightarrow K(X)$$
$$\boldsymbol{c}': KSp(X) \longrightarrow K(X), \quad \boldsymbol{q}: K(X) \longrightarrow KSp(X)$$
$$\boldsymbol{t}: K(X) \longrightarrow K(X)$$

(4.4), (4.3), (4.2) より次の性質がえられる．

(4.6)　(1)　$\boldsymbol{rc}=2$, $\boldsymbol{cr}=1+\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{c}'\boldsymbol{q}=1+\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{qc}'=2$, $\boldsymbol{tt}=1$, $\boldsymbol{tr}=\boldsymbol{r}$

(2)　$\boldsymbol{c}$ は環の準同型．

(3)　$\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{c}'$, $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{t}$ は $KO(X)$-加群の準同型．

(連続)写像 $f: X\to Y$ によって，Yと底空間とするベクトルバンドルξからXを底空間とするベクトルバンドル $f^{\#}\xi$ が誘導され，対応 $f^{\#}: \mathrm{Vect}_{\boldsymbol{F}}(Y)\to\mathrm{Vect}_{\boldsymbol{F}}(X)$ がえられる．これから自然に，準同型

$$f^*: \boldsymbol{KF}(Y) \longrightarrow \boldsymbol{KF}(X)$$

が誘導され，次の性質をもつことは容易にわかる：

(4.7)　(1)　$\boldsymbol{KF}(\ \ )$ は位相空間の圏からアーベル群の圏への反変関手：$1_X{}^*=1_{\boldsymbol{KF}(X)}$, $(g\circ f)^*=f^*\circ g^*$.

(2)　$f\simeq g: X\longrightarrow Y$ (X：パラコンパクト Hausdorff) $\Longrightarrow f^*=g^*$

(3)　$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{R}, \boldsymbol{C} \Longrightarrow f^*$ は環の準同型 ($f^*(\xi\otimes_{\boldsymbol{F}}\eta)=f^*\xi\otimes_{\boldsymbol{F}}f^*\eta$).

(4)　$f^*(\xi\otimes_{\boldsymbol{R}}\eta)=f^*\xi\otimes_{\boldsymbol{R}}f^*\eta$　($\otimes_{\boldsymbol{R}}$ の定義されている範囲で)

(5)　$\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{c}'$, $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{t}$ は f^* と可換．

記号　$\widetilde{\boldsymbol{KF}}(X)=\mathrm{Ker}(i_0{}^*: \boldsymbol{KF}(X)\to\boldsymbol{KF}(x_0))$,

ただし Xは基点 x_0 をもち，$i_0: x_0\to X$ は射入．

1点 x_0 の上のベクトルバンドルは自明である．また，定値写像 $\pi: X\to x_0$ の誘導する $\pi^*: \boldsymbol{KF}(x_0)\to\boldsymbol{KF}(X)$ について $i_0{}^*\circ\pi^*=1$. これらのことから，

(4.8)　(1)　ベクトルバンドルの次元(の代数和)を対応させる対応 dim : $\boldsymbol{KF}(X)\to\boldsymbol{Z}$ は $i_0{}^*$ と同値，特に $KF(x_0)\cong\boldsymbol{Z}$.

(2)　$\boldsymbol{KF}(X)\cong\widetilde{\boldsymbol{KF}}(X)\oplus\boldsymbol{Z}$ (直和)

(3)　$\otimes_{\boldsymbol{R}}, \otimes_{\boldsymbol{C}}$, $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{c}'$, $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{t}$ は $\widetilde{\boldsymbol{KF}}$ で閉じている．

(4)　基点を保つ写像 $f: X \to Y$ は $f^*: \widetilde{KF}(Y) \to \widetilde{KF}(X)$ を誘導し，これに関して，(4.7)が成り立つ．

KF-群と無限次元分類空間

以下，ベクトルバンドルを考えるとき，その底空間は CW-複体または CW-複体と同じホモトピー型をもつパラコンパクト Hausdorff 空間とする．後者の場合にも単に CW-複体ということにする．第2章，系2.17によって，このとき各ベクトルバンドルは構造群 $U(n, \boldsymbol{F})$ をもつとしてよい．分類定理(第2章，定理6.10)によって，

(4.9)　$BU(n, \boldsymbol{F})$ 上の普遍ベクトルバンドル γ_n があって，CW-複体 X を底空間とする．$\boldsymbol{F}$ 上の n 次元ベクトルバンドル ξ の同値類と $[X, BU(n, \boldsymbol{F})]$ の元 $[f]$ とは，$f^{\#}(\gamma_n) \equiv \xi$ によって1対1に対応する．

定義　同じ底空間をもつ．$\boldsymbol{F}$ 上のベクトルバンドル ξ と η が**安定同値** $\Longleftrightarrow \xi \oplus \varepsilon_{\boldsymbol{F}}{}^k \equiv \eta \oplus \varepsilon_{\boldsymbol{F}}{}^l$ となる $k, l \geq 0$ がある．このとき，$\xi \equiv_s \eta$ と表わす．

補題 4.10　X を有限次元 CW-複体とするとき，X を底空間とする $\boldsymbol{F}$ 上のベクトルバンドルの安定同値類と $[X, \boldsymbol{BG}]$ の元とは1対1に対応する．ここで $G = O$ $(\boldsymbol{F} = \boldsymbol{R})$，$G = U$ $(\boldsymbol{F} = \boldsymbol{C})$，$G = Sp$ $(\boldsymbol{F} = \boldsymbol{H})$．

［証明］　$G(2N)/G(N) \times G(N)$ は $(d(N+1)-2)$-普遍(第2章，補題6.8)であるから，N を十分大にとって，$[X, G(2N)/G(N) \times G(N)]$，$[X, BG(N)]$，$[X, \boldsymbol{BG}]$ は自然な対応(§3)で1対1に対応するようにできる．このとき，ξ と安定同値な $\xi \oplus \varepsilon_F{}^{N-n}$ に対応する $[f] \in [X, BG(N)] \cong [X, \boldsymbol{BG}]$ を考えればよい．　(終)

定理 4.11　(1)　補題4.10の対応は自然な同型 $\widetilde{KG}(X) \cong [X, \boldsymbol{BG}]$ をひきおこす．ここで，X は有限次元 CW-複体，$[X, \boldsymbol{BG}] \cong [X, \boldsymbol{BG}]_0$ の群構造は H-群 $\boldsymbol{BG}$ の群構造からひきおこされるものである．

(2)　連結な有限次元 CW-複体 X について，$KG(X) \cong [X, \boldsymbol{BG} \times \boldsymbol{Z}]$ (同型)．

［証明］　$\boldsymbol{BG}$: 0-連結 H-空間 $\Longrightarrow [X, \boldsymbol{BG}]_0 \cong [X, \boldsymbol{BG}]$．$KG(X)$ の元は $\sum a_i \xi_i$ を正の係数の項と負の係数の項に分け，和を Whitney 和でおきかえ，$\xi - \eta$ の形に表わされる．$\widetilde{KG}(X)$ の元は $\dim \xi = \dim \eta$ となる $\xi - \eta$ で表わされる．$\boldsymbol{BG}$: H-群 $\Longrightarrow [X, \boldsymbol{BG}]_0$ は逆元をもつ．補題4.10によって，η に対して，

$\eta\oplus\eta'\equiv_s \varepsilon_F{}^N$ となる η' がある．このことから，$\widetilde{KG}(X)$ の元は $\xi-\varepsilon_F{}^n$，$n=\dim\xi$，の形に表わされることがわかる．さらに $KG(X)$ の定義を考えれば，

$$\xi-\varepsilon_F{}^n \text{ と } \eta-\varepsilon_F{}^m \text{ が } \widetilde{KG}(X) \text{ の同じ元を表わす} \Longleftrightarrow \xi\equiv_s\eta$$

がわかる．よって，$\widetilde{KG}(X)\cong[X,\ \boldsymbol{BG}]$．$\boldsymbol{BG}$ の積がベクトルバンドルの Whitney 和に対応していることは容易にわかるから，(1)が証明された．(2)はベクトルバンドルの形式的次元を $\boldsymbol{Z}$ の元に対応させて証明される．（終）

系 4.12　有限次元 CW-複体上のベクトルバンドル ξ に対して，$\xi\oplus\eta$ が自明となる η がある．

定理 4.11 の同型によって，$f^*:\widetilde{KG}(Y)\to\widetilde{KG}(X)$ は $f^*:[Y,\ \boldsymbol{BG}]_0\to[X,\ \boldsymbol{BG}]_0$ に対応するから，定理 1.23 より，

(4.13)　有限次元 CW-対 $(X,\ A)$ について次の系列は完全：

$$\cdots\xrightarrow{S\pi^*}\widetilde{KG}(SX)\xrightarrow{Si^*}\widetilde{KG}(SA)\xrightarrow{\delta^*}\widetilde{KG}(X/A)\xrightarrow{\pi^*}\widetilde{KG}(X)\xrightarrow{i^*}\widetilde{KG}(A)$$

注意 4.13′　§5 の $\widetilde{KG}$-群の周期性 $\widetilde{KG}(X)\cong\widetilde{KG}(S^8X)$ を用いて，$KG^n(X,\ A)=\widetilde{KG}(S^{8N-n}(X/A))$ (N：十分大) とおくことにより，一般コホモロジー論 $KG^n(\quad)$ がえられる．

テンソル積 $\otimes$ (または $\otimes_R$)：$K\boldsymbol{F}(X)\otimes K\boldsymbol{F}'(X)\to KG(X)$ の定義される $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{F}'$, G に対して，クロス積 $\hat{\otimes}$ および **smash** 積 $\wedge$ を以下のように定義する．

射影 $p_A:A\times B\to A$，$p_B:A\times B\to B$ について

$$\hat{\otimes}:K\boldsymbol{F}(A)\otimes K\boldsymbol{F}'(B)\longrightarrow KG(A\times B)\Longleftrightarrow\alpha\hat{\otimes}\beta=p_A{}^*\alpha\otimes p_B{}^*\beta$$

により**クロス積**が定義される．クロス積は明らかに自然性，結合性をもつ：

(4.14)　$(f\times g)^*(\alpha\hat{\otimes}\beta)=f^*\alpha\hat{\otimes}g^*\beta$,　$(\alpha\hat{\otimes}\beta)\hat{\otimes}\gamma=\alpha\hat{\otimes}(\beta\hat{\otimes}\gamma)$

$i_A:A=A\times b_0\subset A\vee B$，$i_B:B=a_0\times B\subset A\vee B$ を射入とするとき，

$$(i_A{}^*,\ i_B{}^*):\widetilde{KG}(A\vee B)\longrightarrow\widetilde{KG}(A)\oplus\widetilde{KG}(B)$$

は明らかに同型である．$i:A\vee B\subset A\times B$ を射入とし，合成

$$\widetilde{KG}(A)\oplus\widetilde{KG}(B)\xrightarrow{p_A^*+p_B^*}\widetilde{KG}(A\times B)\xrightarrow{i^*}\widetilde{KG}(A\vee B(\xrightarrow{(i_A^*,\ i_B^*)}\widetilde{KG}(A)\oplus\widetilde{KG}(B)$$

を考えるとき，$p_A\circ i\circ i_A=1_A$，$p_A\circ i\circ i_B=0$ 等によって，この合成は恒等対応であることがわかる．従って，i^* は全射で $\mathrm{Ker}\,i^*$ は直和因子となる．A, B は有限次元 CW-複体として，(4.13)を適用すれば同型

(4.15)　$\pi^*:\widetilde{KG}(A\wedge B)\cong\mathrm{Ker}(i^*:\widetilde{KG}(A\times B)\longrightarrow\widetilde{KG}(A\vee B))$

がえられる．

$\alpha\in\widetilde{KF}(A)\subset KF(A)$，　$\beta\in\widetilde{KF}'(B)\subset KF'(B)$ のクロス積 $\alpha\hat{\otimes}\beta\in KG(A\times B)$ を考えるとき，　$(i_A{}^*\circ i^*)(\alpha\hat{\otimes}\beta)=0^*\alpha\hat{\otimes}\beta=0$,　$(i_B{}^*\circ i^*)(\alpha\hat{\otimes}\beta)=\alpha\hat{\otimes}0^*\beta=0$ であるから，$i^*(\alpha\hat{\otimes}\beta)=0\Longrightarrow\alpha\hat{\otimes}\beta\in\pi^*(\widetilde{KG}(A\wedge B))$．よって

$$\wedge:\widetilde{KF}(A)\otimes\widetilde{KF}'(B)\longrightarrow\widetilde{KG}(A\wedge B)\Longleftrightarrow\alpha\wedge\beta=\pi^{*-1}(\alpha\hat{\otimes}\beta)$$

によって，**smash 積**が定義される．smash 積は自然性，結合性をもつ：

(4.14)′　$(f\wedge g)^*(\alpha\wedge\beta)=f^*\alpha\wedge g^*\beta$,　　$(\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma=\alpha\wedge(\beta\wedge\gamma)$

$\otimes_R$ に対応するものも同じ記号 $\hat{\otimes}$，$\wedge$ で表わす．これらも上の $\hat{\otimes}$，$\wedge$ と同様な性質をもち，結合性も定義されている範囲で成り立つ．

Chern 指標

ベクトルバンドルの Chern 類をしらべるには次の補題が有用である．

補題 4.16　CW-複体 X 上の複素ベクトルバンドル ξ, η に対して，空間 Y と写像 $\rho:Y\to X$ が存在して次の条件をみたす：

(1)　$\rho^\#\xi\equiv\xi_1\oplus\cdots\oplus\xi_n$,　$\rho^\#\eta=\eta_1\oplus\cdots\oplus\eta_m$,　ただし ξ_i, η_j は1次元複素ベクトルバンドル．

(2)　$\rho^*:H^*(X)\longrightarrow H^*(Y)$ は単射．

［証明］　(4.9)により ξ に対応する写像 $f:X\to BU(n)$, $\xi=f^\#\gamma_n$, を考える．ファイバーバンドル $U(n)/T^n\xrightarrow{i}BT^n\xrightarrow{p}BU(n)$ から f で誘導されたファイバーバンドルを $U(n)/T^n\xrightarrow{i}Y'\xrightarrow{g}X$ とする．$p^\#\gamma_n$ は BT^n 上の普遍ベクトルバンドルとなるから，BT 上の普遍ベクトルバンドルの直積と同値である．従って $p^\#\gamma_n=\gamma_1{}^{(1)}\oplus\cdots\oplus\gamma_1{}^{(n)}$ と1次元複素ベクトルバンドルの Whitney 和に分解される．$\tilde{f}:Y'\to BT^n$ を f の上のバンドル写像とすると $g^\#\xi=g^\#f^\#\gamma_n=\tilde{f}^\#p^\#\gamma_n=\xi_1\oplus\cdots\oplus\xi_n$, $\xi_i=\tilde{f}^\#(\gamma_1{}^{(i)})$ となる．

次に，第3章，定理5.5により，$i^*:H^*(BT^n)\to H^*(U(n)/T^n)$ は全射．この i は $U(n)/T^n\xrightarrow{i}Y'\xrightarrow{f}BT^n$ と分解されることから，$i^*:H^*(Y')\to H^*(U(n)/T^n)$ も全射である．第3章の定理4.4，定理4.2より g^* は単射である．

さらに η が与えられているときは，$g^\#\eta$ に対応する写像 $Y'\to BU(m)$ を考え，同様に写像 $g':Y\to Y'$ がえられるから，$\rho=g\circ g'$ とおけばよい．　　(終)

補題 4.17　補題 4.16 において $c_1(\xi_i)=x_i$, $c_1(\eta_j)=y_j\in H^2(Y)$ とおくとき，

(1)　$\rho^*\sum_{i=0}^{n} c_i(\xi)=\prod_{i=1}^{n}(1+x_i)$,　$\rho^*\sum_{j=0}^{m} c_j(\eta)=\prod_{j=1}^{m}(1+y_j)$

(2)　$\rho^*\sum_{k=0}^{m+n} c_k(\xi\oplus\eta)=\prod_{i=1}^{n}(1+x_i)\prod_{j=1}^{m}(1+y_j)$，従って，$c_k(\xi\oplus\eta)=\sum_{i+j=k} c_i(\xi)c_j(\eta)$

(3)　$\rho^*\sum_{k=0}^{m+n} c_k(\xi\otimes\eta)=\prod_{i,j}(1+x_i+y_j)$

［証明］　(1)　Chern 類の定義(第3章，§5)によって，$\rho^*(\sum^n c_i)=\prod^n(1+t_i)$．これをバンドル写像$(\tilde{f}, f):(Y', g, X)\to(BT^n, p, BU(n))$でひきもどすとき，$f^*(c_i)=c_i(\xi)$，$\tilde{f}^*(t_i)=x_i$であるから(1)の前半がえられる．後半も同様．

(2) は $\rho^\#(\xi\oplus\eta)=\xi_1\oplus\cdots\oplus\xi_n\oplus\eta_1\oplus\cdots\oplus\eta_m$ より明らか．

(3) は $\rho^\#(\xi\otimes\eta)=\bigoplus_{i,j}\xi_i\otimes\xi_j$ であるから，$c_1(\xi_i\otimes\eta_j)=c_1(\xi_i)+c_1(\eta_j)$ を示せば十分である．これは分類空間 $BU(1)=P_\infty(\boldsymbol{C})$ での $c_1=c_1(\xi_1)$，さらに $S^2=P_1(\boldsymbol{C})$ 上で考えればよい．ξ, η が f, $g:S^2\to BU(1)$ に対応しているとき，同型 $\pi_2(BU(1))\cong\pi_1(U(1))$ によって $\xi\otimes\eta$ は $U(1)$ における積で表わされる(補題4.22の証明参照)．従って，$c_1(\xi\otimes\eta)=c_1(\xi)+c_1(\eta)$ がえられる．　(終)

定義　$ch_n(\xi)\in H^{2n}(X;\ \boldsymbol{Q})\Longleftrightarrow\rho^*ch_n(\xi)=\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^n}{n!}$．$ch_n(\xi)$ を ξ の **n 次 Chern 指標**，$ch(\xi)=\sum_{n\geq 0}ch_n(\xi)\in H^{**}(X;\ \boldsymbol{Q})$ を**全 Chern 指標**という．ただし，$H^{**}(X;\ \boldsymbol{Q})=\prod H^i(X;\ \boldsymbol{Q})$．

$ch_n=ch_n(\gamma_n)\in H^{2n}(BU(n);\ Q)$ とおけば，

$$\xi=f^\#\gamma_n\Longrightarrow ch_n(\xi)=f^*(ch_n)$$

Newton の公式(2.18)′に注意して，

(4.18)　(1)　$ch_n=\frac{1}{n!}s_n(c_1,\ \cdots,\ c_n)=\frac{1}{n!}c_1{}^n+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!}c_n$

(2)　$\rho^*ch(\xi)=e^{x_1}+\cdots+e^{x_n}$

定理 4.19　(1)　$ch(\xi\oplus\eta)=ch(\xi)+ch(\eta)$，$ch(\xi\otimes\eta)=ch(\xi)ch(\eta)$

(2)　ch，ch_n は $ch:K(X)\to H^{**}(X;\ \boldsymbol{Q})$，$ch_n:K(X)\to H^{2n}(X;\ \boldsymbol{Q})$ に拡張され，ch は自然性 $f^{**}\circ ch=ch\circ f^*$ をもつ環の準同型である．

［証明］　(1) 単射 ρ^* を施して調べればよい：

$$\rho^*ch(\xi\oplus\eta)=e^{x_1}+\cdots+e^{x_n}+e^{y_1}+\cdots+e^{y_m}=\rho^*ch(\xi)+\rho^*ch(\eta)$$
$$=\rho^*(ch(\xi)+ch(\eta))$$

$$\rho^*ch(\xi\otimes\eta)=\sum_{i,j}e^{x_i+y_j}=\sum_i e^{x_i}\sum_j e^{y_j}=\rho^*ch(\xi)\cdot\rho^*ch(\eta)=\rho^*(ch(\xi)ch(\eta))$$

(2)　$ch(\xi\oplus\eta)=ch(\xi)+ch(\eta)$ を使って $ch(\xi)$ を $K(X)$ に拡張できる．その他は殆んど明らか．　(終)

注意 $c(\xi\oplus\eta)=c(\xi)c(\eta)$ であるので，全 Chern 類 $c=\sum c_i$ の定義を $K(X)$ に拡張することはできない．

smash 積の写像による表示

テンソル積

$$\otimes : G(n)\times O(m)\longrightarrow G(mn)$$

は Lie 群の単射な準同型である．$BG(mn)=EG(mn)/G(mn)$ とするとき，$EG(mn)/\otimes(G(n)\times O(m))$ は $G(n)\times O(m)$ の分類空間であるから，ホモトピー同値 $BG(n)\times BO(m)\to EG(mn)/\otimes(G(n)\times O(m))$ がある．これに $BG(mn)$ への射影を続けたものを

$$\otimes : BG(n)\times BO(m)\longrightarrow BG(mn)$$

で表わす．このとき，

(4.20) $f: A\to BG(n)$, $g: B\to BO(m)$ がそれぞれ ξ, η に対応している ($\xi\equiv f^{\#}\gamma_n$, $\eta\equiv f^{\#}\gamma_m$) とき，$\otimes\circ(f\times g)$ は $\xi\hat{\otimes}\eta$ に対応する．

ここで，さらに $BG(mn)$ を $\boldsymbol{BG}$ へ入れて考えるとき，

補題 4.21 A, B を有限次元 CW-複体とする．$\widetilde{KG}(A)\cong[A, BG(n)]_0$, $\widetilde{KO}(B)\cong[B, BO(m)]_0$ となるように n, m を十分大にとる．写像

$$\wedge : BG(n)\wedge BO(m)\longrightarrow \boldsymbol{BG}$$

が存在して，$\alpha\in\widetilde{KG}(A)$, $\beta\in\widetilde{KO}(B)$ がそれぞれ $f: A\to BG(n)$, $g: B\to BO(m)$ に対応しているとき，$\wedge\circ(f\wedge g)$ は $\alpha\wedge\beta\in\widetilde{KG}(A\wedge B)$ に対応する．

［証明］ p_1, p_2 をそれぞれ $BG(n)\times BO(m)$ から $BG(n)$, $BO(m)$ への射影のあとへ $BG(n)\vee BO(m)$ への射入を続けたものとすると，(4.20) より，$\otimes\circ p_1\circ(f\times g)$ は $\xi\hat{\otimes}1$, $\otimes\circ p_2\circ(f\times g)$ は $1\hat{\otimes}\eta$ に対応する．$\boldsymbol{BG}$ における積 μ と逆元 ι を用いて $h(x)=\mu(\otimes x, \mu((\iota\circ\otimes\circ p_1)x, (\iota\circ\otimes\circ p_2)x))$ とおくと $h\circ(f\times g)$ は $\xi\hat{\otimes}\eta-\xi\hat{\otimes}1-1\hat{\otimes}\eta=\pi^*(\xi\wedge\eta)-1\hat{\otimes}1$ を表わしている．$h|BG(n)=\mu\circ(\otimes\times(\mu\circ(\iota\times 0)\circ d)\circ\otimes)\circ d=\mu\circ(\otimes\times(\iota\circ\otimes))\circ d=\mu\circ(1\times\iota)\circ d\circ\otimes\simeq 0\circ\otimes=0$. 同様に，$h|BO(m)\simeq 0$. ホモトピー拡張性質を使って，$h\simeq h'$ かつ $h'(BG(n)\wedge BO(m))=e$ となる．$\wedge=h'\circ\pi^{-1}$ とおけば，これが求める写像である． （終）

全く同様に，

(4.21)$'$ 補題 4.21 は $\wedge : \tilde{K}(A)\otimes\tilde{K}(B)\to\tilde{K}(A\wedge B)$ と写像 $\wedge : BU(n)\wedge BU$

$(m) \to \boldsymbol{BU}$に対しても成り立つ.

もう少し具体的に，$A=S^{k+1}$，$B=S^1$ の場合を考えよう．同型 $\widetilde{KG}(S^{k+1}) \cong [S^{k+1}, \boldsymbol{BG}]=\pi_{k+1}(\boldsymbol{BG}) \cong \pi_k(\boldsymbol{G})$ により $f: S^k \to G(n) \subset \boldsymbol{G}$ に対応するベクトルバンドル ξ_f を次のように構成する．$G(n)=U(n, \boldsymbol{F})$ とする．S^{k+1} は $D^{k+1} \times \{0, 1\}$ において，$S^k \times 0$ と $S^k \times 1$ を $(x, 0) \sim (x, 1)$ で同一視したものと考える．$D^{k+1} \times \{0, 1\} \times \boldsymbol{F}^n$ において $S^k \times 0 \times \boldsymbol{F}^n$ と $S^k \times 1 \times \boldsymbol{F}^n$ の間に関係

$$(x, 0, \boldsymbol{v}) \sim (x, 1, \boldsymbol{v}') \Longleftrightarrow \boldsymbol{v}'=f(x) \cdot \boldsymbol{v}$$

を入れてえられる空間を E_f とする．$p(x, \varepsilon, \boldsymbol{v})=(x, \varepsilon)$ とおけば，$\xi_f=(E_f, p, S^{k+1})$ は $\boldsymbol{F}$ 上の n 次元ベクトルバンドルとなる．この ξ_f が上の同型で f に対応することは容易に確かめられる．

一方，$\widetilde{KO}(S^1) \cong \pi_0(\boldsymbol{O}) \cong \boldsymbol{Z}_2$ の生成元を表わすベクトルバンドル η は次のように構成される．S^1 は I で 0 と 1 を同一視したものと考える．$I \times \boldsymbol{R}^1$ において，$0 \times \boldsymbol{R}^1$ と $1 \times \boldsymbol{R}^1$ を $(0, \boldsymbol{v}) \sim (1, -\boldsymbol{v})$ で同一視してえられる 1 次元ベクトルバンドルを η とする (η は Möbius の帯である).

補題 4.22　$\xi \in \widetilde{KG}(S^{k+1})$ が $f: S^k \to G(n)$ に対応するとき，$\xi \wedge \eta \in \widetilde{KG}(S^{k+2})$ は次のように構成される写像 $g: S^{k+1}=S^k \wedge S^1 \to G(2n)$ に対応する：$x \in S^k$，$S^1=I/\partial I$ の点を $t \in I$ で表わし，$w: I \to G(2n)$ を $w(0)=I_{2n}$ と $w(1)=-I_{2n}$ を結ぶ道とするとき，g は次の式で定義される：

$$g(x, t)=(f(x) \oplus I_n) w(t) (f(x) \oplus I_n)^{-1} w(t)^{-1}$$

［証明］　まず $\xi \otimes \eta$ を構成する．$\otimes: G(n) \otimes O(1) \to G(n)$ は ± 1 のスカラー積に外ならない．$\otimes$ はこの積を用いて貼り合わせる関数を合成すればよい．さらに，$(\xi \otimes \eta) \oplus (\varepsilon_{\boldsymbol{F}^n} \otimes \eta)$ を考えると，この(ベクトル)バンドルは $D^{k+1} \times \{0, 1\} \times I \times \boldsymbol{F}^{2n}$ に次の関係を与えてえられる：

$$(x, 0, t, \boldsymbol{v}) \sim (x, 1, t, (f(x) \oplus I_n)\boldsymbol{v}) \quad (x \in S^k;\ t \in I;\ \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{F}^{2n})$$

$$(\bar{x}, \varepsilon, 0, \boldsymbol{v}) \sim (\bar{x}, \varepsilon, 1, -\boldsymbol{v}) \quad (\bar{x} \in D^{k+1};\ \varepsilon=0, 1;\ \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{F}^{2n})$$

ここで，$D^{k+1} \times \{0, 1\} \times I \times \boldsymbol{F}^{2n}$ からそれ自身への同相 ψ を

$$\psi(\theta x, \varepsilon, t, \boldsymbol{v})=(\theta x, \varepsilon, t, w(\theta t)^{-1}\boldsymbol{v}) \quad (x \in S^k;\ \theta, t \in I;\ \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{F}^{2n})$$

で定義して，この ψ によって座標を書きかえると，関係式は次のようになる：

$$(x, 0, t, \boldsymbol{v}) \sim (x, 1, t, w(t)(f(x) \oplus I_n) w(t)^{-1}\boldsymbol{v}) \quad (x \in S^k)$$

$$(\bar{x},\ \varepsilon,\ 0,\ v)\sim(\bar{x},\ \varepsilon,\ 1,\ v)$$

S^k の基点 e_1 について，$f(e_1)=I_n \Longrightarrow e_1\times S^1$ 上でこのバンドルは自明．従って，このバンドルは $S^{k+1}\times S^1/e_1\times S^1$ 上で定義されていると考えられる．これは $D^{k+1}\times S^1/e_1\times S^1$ 上の自明な2つのバンドルを $S^k\times S^1/e_1\times S^1$ において上のように貼り合わせたものとなる．$D^{k+1}\times S^1/e_1\times S^1$ は $S^k\times S^1/e_1\times S^1$ の上の錐であるから，このバンドルは

$$[g_1]\in[S^k\times S^1/e_1\times S^1,\ G(2n)],\ \ g_1(x,\ t)=w(t)(f(x)\oplus I_n)w(t)^{-1}$$

に対応している．

$$\xi\otimes\eta+\varepsilon_F{}^n\otimes\eta-\xi\otimes\varepsilon_F{}^1\in\widetilde{KG}(S^{k+1}\times S^1)$$

に対応する写像は $G(2n)$ における積を使って，$g_2(x,\ t)=(f(x)\oplus I_n)^{-1}g_1(x,\ t)$ で与えることができる．$g_2(S^k\times e_1)=I_{2n}$ となるから，g_2 を $S^k\wedge S^1=S^k\times S^1/S^k\vee S^1$ からの写像と見直すことにより，g_2 は $\xi\wedge\eta$ に対応していることがわかる．ここで，$\widetilde{KO}(S^1)\cong\pi_1(\boldsymbol{BO})\cong\boldsymbol{Z}_2$ において $2\eta=0$ であるから，$\xi\wedge\eta=(-\xi)\wedge\eta$．従って，$g_2$ の定義式で，$f(x)$ を $f(x)^{-1}$ でおきかえることにより補題がえられる． (終)

§5 KF-群の周期性

Bott の写像

記号 $R_t(n)=e^{\pi it}I_n\oplus e^{-\pi it}I_n\in SU(2n)$

$$S_t(n)=\boldsymbol{r}(e^{\pi it}I_n)=\begin{pmatrix}\cos\pi tI_n & -\sin\pi tI_n\\ \sin\pi tI_n & \cos\pi tI_n\end{pmatrix}\in SO(2n)$$

定義 以下に定義される写像を **Bott の写像**という：

$\beta(n)\ :\ U(2n)/U(n)\times U(n)\longrightarrow\Omega SU(2n)$

$\Longleftrightarrow\beta(n)\{A\}(t)=AR_t(n)A^{-1}R_t(n)^{-1},\ \ A\in U(2n),\ \ t\in I$

$\beta_{Sp}(n)\ :\ Sp(n)/U(n)\longrightarrow\Omega Sp(n)$

$\Longleftrightarrow\beta_{Sp}(n)\{A\}(t)=A(e^{\pi it}I_n)A^{-1}(e^{\pi it}I_n)^{-1},\ \ A\in Sp(n),\ t\in I$

$\beta_O(n)\ :\ O(2n)/U(n)\longrightarrow\Omega SO(2n)$ ($\boldsymbol{r}:\ U(n)\hookrightarrow O(2n)$ は省略)

$\Longleftrightarrow\beta_O(n)\{A\}(t)=AS_t(n)A^{-1}S_t(n)^{-1},\ \ A\in O(2n),\ \ t\in I$

補題 5.1 $\boldsymbol{\beta}\,|\,U(2n)/\tau_n(U(n)\times U(n))=\Omega\tau_n\circ\beta(n)\circ\tau_n{}^{-1}$, $\boldsymbol{\beta}_{Sp}\,|\,Sp(n)/U(n)=\beta_{Sp}$

(n)，$\boldsymbol{\beta}_{O}|O(2n)/\tau_n\boldsymbol{r}\,U(n)=\Omega\tau_n\circ\beta_O(n)\circ\tau_n{}^{-1}$ とおくことによって，写像

$$\boldsymbol{\beta}:\boldsymbol{BU}\longrightarrow\Omega\boldsymbol{SU},\quad \boldsymbol{\beta}_{Sp}:\boldsymbol{Sp}/\boldsymbol{U}\longrightarrow\Omega\boldsymbol{Sp},\quad \boldsymbol{\beta}_{O}:\boldsymbol{O}/\boldsymbol{U}\longrightarrow\Omega\boldsymbol{SO}$$

が定義され，これらは H-写像である．

［証明］　まず，$\beta(n)$，$\beta_{Sp}(n)$，$\beta_O(n)$ の定義が代表元 A のとり方に無関係であることを示す必要がある．$B=B_1\oplus B_2\in U(n)\times U(n)$ と $R_t(n)$ は可換であるから，$(AB)R_t(n)(AB)^{-1}R_t(n)^{-1}=AR_t(n)BB^{-1}A^{-1}R_t(n)^{-1}=AR_t(n)A^{-1}R_t(n)^{-1}$．故に，$\beta(n)$ は A のとり方によらず定まる．明らかに $U(n)$ の元と $e^{\pi it}I_n$ は可換であるから，$\beta_{Sp}(n)$ が定まる．$U(n)=\boldsymbol{r}(U(n))$ の元と $S_t(n)=\boldsymbol{r}(e^{\pi it}I_n)$ は可換であるから $\beta_O(n)$ が定まる．ここで，$R_0(n)=S_0(n)=I_{2n}$，$e^{\pi i0}I_n=I_n$，$R_1(n)=S_1(n)=-I_{2n}$，$e^{\pi i1}I_n=-I_n$ であるから，これらの写像は値を閉道空間にとり，基点$\{e\}$を基点(定値道)に写すことに注意する．

射入 $Sp(n)\subset Sp(n+1)$ は $A\to A\oplus 1$ で与えられる．$\beta_{Sp}(n+1)\{A\oplus 1\}(t)=(A\oplus 1)(e^{\pi it}I_n\oplus e^{\pi it})(A\oplus 1)^{-1}(e^{\pi it}I_n\oplus e^{\pi it})=\beta_{Sp}(n)\{A\}(t)\oplus 1$ であるから，$\boldsymbol{\beta}_{Sp}$ が定義されることがわかる．$\boldsymbol{\beta}$ については，(3.6)を用いて

$$\begin{aligned}\tau_{n+1}[\beta(n+1)\{\tau_{n+1}^{-1}(A\oplus I_2)\}(t)]&=(A\oplus I_2)\tau_{n+1}(R_t(n+1))(A\oplus I_2)^{-1}\tau_{n+1}(R_t(n+1)^{-1})\\&=(A\oplus I_2)(\tau_nR_t(n)\oplus R_1(n))(A^{-1}\oplus I_2)(\tau_nR_t(n)^{-1}\oplus R_1(n)^{-1})\\&=\tau_n(\beta(n)\{\tau_n{}^{-1}A\}(t))\oplus I_2\end{aligned}$$

これは $\Omega\tau_{n+1}\circ\beta(n+1)\circ\tau_{n+1}^{-1}|U(2n)/\tau_n(U(n)\times U(n))=\Omega\tau_n\circ\beta(n)\circ\tau_n{}^{-1}$ を示しているから，$\boldsymbol{\beta}$ が定義される．$\boldsymbol{\beta}_O$ についても，(3.6)の第2式を用いて同様に示される．

単射 $\alpha,\ \beta:\boldsymbol{N}\to\boldsymbol{N}$ を $\alpha(i)=2i-1$，$\beta(i)=2i$ で定義し，$\boldsymbol{Sp}$ における積 $\psi_{\alpha,\beta}$を考える．$A,\ B\in Sp(n)$ について，$\psi_{\alpha,\beta}(A,\ B)=\tau_n(A\oplus B)$ である．よって，$\psi_{\alpha,\beta}(\beta_{Sp}(n)\{A\}(t),\ \beta_{Sp}(n)\{B\}(t))=\tau_n[Ae^{\pi it}I_nA^{-1}e^{-\pi it}I_n\oplus Be^{\pi it}I_nB^{-1}e^{-\pi it}I_n]=\tau_n[(A\oplus B)e^{\pi it}I_{2n}(A\oplus B)^{-1}e^{-\pi it}I_{2n}]=\psi_{\alpha,\beta}(A,\ B)e^{\pi it}I_{2n}\psi_{\alpha,\beta}(A,\ B)^{-1}e^{-\pi it}I_{2n}=\beta_{Sp}(2n)\{\psi_{\alpha,\beta}(A,\ B)\}(t)$．従って，$\boldsymbol{\beta}_{Sp}$ は H-写像：$\Omega\psi_{\alpha,\beta}\circ(\boldsymbol{\beta}_{Sp}\times\boldsymbol{\beta}_{Sp})=\boldsymbol{\beta}_{Sp}\circ\psi_{\alpha,\beta}$．$\boldsymbol{\beta}_O$ が H-写像であることは，$\psi_{\bar{\alpha},\bar{\beta}}$ を用いて同様にわかる．　$\boldsymbol{\beta}$ も同様．　　(終)

補題 5.2　次の図式はホモトピー可換：

$$\begin{array}{ccc}\boldsymbol{Sp}/\boldsymbol{U} & \xrightarrow{\beta_{Sp}} & \Omega\boldsymbol{Sp}\\ \downarrow{\scriptstyle j_H} & & \downarrow{\scriptstyle \Omega ic'}\\ \boldsymbol{BU} & \xrightarrow{\beta} & \Omega\boldsymbol{SU}\end{array}\qquad\qquad\begin{array}{ccc}\boldsymbol{O}/\boldsymbol{U} & \xrightarrow{\beta_O} & \Omega\boldsymbol{SO}\\ \downarrow{\scriptstyle j_R} & & \downarrow{\scriptstyle \Omega ic}\\ \boldsymbol{BU} & \xrightarrow{\beta} & \Omega\boldsymbol{SU}\end{array}$$

［証明］　$\boldsymbol{c}(e^{\pi it}I_n)=e^{\pi it}I_n\oplus e^{-\pi it}I_n=R_t(n)$ および $\boldsymbol{c}$ が準同型であることより，
$\beta(n)\{\boldsymbol{c}A\}(t)=(\boldsymbol{c}A)R_t(n)(\boldsymbol{c}A)^{-1}R_t(n)^{-1}=\boldsymbol{c}(Ae^{\pi it}I_nA^{-1}e^{-\pi it}I_n)=\boldsymbol{c}[\beta_{Sp}(n)\{A\}(t)]$
これから，第1の図式の可換性 $\boldsymbol{\beta}\circ\boldsymbol{j_H}=\Omega\boldsymbol{i_{C'}}\circ\boldsymbol{\beta_{Sp}}$ がえられる．

また，$\eta_nS_t(n)\eta_n^{-1}=\eta_n\boldsymbol{r}(e^{\pi it}I_n)\eta_n^{-1}=j_n(e^{\pi it}I_n)=R_t(n)$ を使って，$\beta(n)\{j_n(A)\}(t)=j_n(A)R_t(n)j_n(A)^{-1}R_t(n)^{-1}=j_n(AS_t(n)A^{-1}S_t(n)^{-1})=j_n(\beta_O(n)\{A\}(t))=\eta_n(\beta_O(n)\{A\}(t))\eta_n^{-1}$．$U(2)$ は 0-連結であるから，道 $w:I\to U(2)$ で，$I_2=w(0)$ と $\eta_1=w(1)$ を結ぶものがある．道

$$w_n:I\longrightarrow U(2n)\Longleftrightarrow w_n(s)=\tau_n^{-1}(w(s)\oplus\cdots\oplus w(s))$$

は I_{2n} と $w_n(1)=\eta_n$ を結ぶ道である．ホモトピー

$$H(n):(O(2n)/U(n))\times I\longrightarrow\Omega SU(2n)$$
$$\Longleftrightarrow H(n)(\{A\},s)(t)=w_n(s)(\beta_O(n)\{A\}(t))w_n(s)^{-1}$$

は $\Omega i\circ\beta_O(n)\simeq\beta(n)\circ j_n$ $(\Omega i:\Omega SO(2n)\subset\Omega SU(2n))$ を示している．今

$$H:(\boldsymbol{O}/\boldsymbol{U})\times I\longrightarrow\Omega\boldsymbol{SU}\Longleftrightarrow H|(O(2n)/\tau_n\boldsymbol{r}U(n))\times I$$
$$=\Omega\tau_n\circ H(n)\circ(\tau_n^{-1}\times 1_I)$$

によって，H が n に無関係に定まれば，この H は $\Omega\boldsymbol{i_C}\circ\boldsymbol{\beta_O}\simeq\boldsymbol{\beta}\circ\boldsymbol{j_R}$ を示すホモトピーである．$\Omega\tau_{n+1}\circ\beta_O(n+1)\circ\tau_{n+1}^{-1}|O(2n)/\tau_n\boldsymbol{r}U(n)=\Omega\tau_n\circ\beta_O(n)\circ\tau_n^{-1}$ であるから，H が n に無関係に定まるためには

$$\tau_{n+1}[w_{n+1}(s)\tau_{n+1}^{-1}(B\oplus I_2)w_{n+1}(s)^{-1}]=\tau_n[w_n(s)(\tau_n^{-1}B)w_n(s)^{-1}]\oplus I_2$$

であることをいえばよい．ところが，τ_{n+1}，τ_n は準同型であるから，

左辺$=\tau_{n+1}(w_{n+1}(s))(B\oplus I_2)\tau_{n+1}(w_{n+1}(s)^{-1})=(w(s)\oplus\cdots)(B\oplus I_2)(w(s)^{-1}\oplus\cdots)$
$=[\tau_n(w_n(s))B\tau_n(w_n(s)^{-1})]\oplus I_2=$右辺　　(終)

$SU(n+1)$ の胞体分割

n 次元複素射影空間 $P_n(\boldsymbol{C})=U(n+1)/U(1)\times U(n)$ の懸垂 $S(P_n(\boldsymbol{C}))$ から $SU(n+1)$ への写像 $\bar\beta_{1,n}$ を次のように定義する：

$$\bar\beta_{1,n}:S(P_n(\boldsymbol{C}))\longrightarrow SU(n+1)\Longleftrightarrow\bar\beta_{1,n}(\{A\},t)=AR_t(1,n)A^{-1}R_t(1,n)^{-1}$$

ただし，$A\in U(n+1)$，$R_t(1,n)=e^{\pi it}\oplus e^{-\pi it}I_n$．この定義が $\{A\}$ の代表元 A のとり方に無関係であり，$t=0$, 1 または $A=I_n$ のときは I_{n+1} に値をもつことは $\beta(n)$ の場合と同様にわかる．$p:SU(n+1)\longrightarrow S^{2n+1}=SU(n+1)/SU(n)$ を射影とする．

補題 5.3　$\overline{\beta}_{1,n}|S(P_{n-1}(\boldsymbol{C}))=\overline{\beta}_{1,n-1}$,

$p\circ\overline{\beta}_{1,n}:(S(P_n(\boldsymbol{C})),\ S(P_{n-1}(\boldsymbol{C})))\to(S^{2n+1},\ \boldsymbol{e}_{n+1})$ は相対同相である.

［証明］　最初の等式は明らかである. $A=(a_{ij})\Longrightarrow A^{-1}=\overline{A}^t=(\overline{a}_{ji})$. このとき $R_t(1,\ n)A^{-1}R_t(1,\ n)^{-1}=(\overline{a}_{ji}(1+\delta_{j1}(e^{2\pi it}-1))(1+\delta_{1i}(e^{-2\pi it}-1)))$ であるから,

$$\overline{\beta}_{1,n}(\{A\},t)=(\sum_k a_{ik}\overline{a}_{jk}(1+\delta_{j1}(e^{2\pi it}-1))(1+\delta_{1k}(e^{-2\pi it}-1)))$$

$$\begin{aligned}(p\circ\overline{\beta}_{1,n})(\{A\},t)&=(\sum_k a_{ik}\overline{a}_{n+1,k}(1+\delta_{n+1,1}(e^{2\pi it}-1))(1+\delta_{1k}(e^{-2\pi it}-1)))\\&=((\sum_k a_{ik}\overline{a}_{n+1,k})+a_{i1}\overline{a}_{n+1,1}(e^{-2\pi it}-1))\\&=(\delta_{i,n+1}+a_{i1}\overline{a}_{n+11}(e^{-2\pi it}-1))\end{aligned}$$

ここで, $y_i=a_{i1}$ とおき, $\{A\}=[y_1:\cdots:y_{n+1}]$ と表わすとき, 写像

$$h:(D^{2n},\ S^{2n-1})\longrightarrow(P_n(\boldsymbol{C}),\ \ P_{n-1}(\boldsymbol{C}))$$

$$\Longleftrightarrow h(\boldsymbol{x})=h(x_1,\ \cdots,\ x_n)=[x_1:\cdots:x_n:\sqrt{1-\|\boldsymbol{x}\|^2}]$$

は相対同相写像である. よって, $r=\sqrt{1-\|\boldsymbol{x}\|^2}$, $\lambda=e^{-2\pi it}-1$ とおけば,

$$(p\circ\overline{\beta}_{1,n}\circ Sh)((x_1,\ \cdots,\ x_n),\ t)=(x_1r\lambda,\ \cdots,\ x_nr\lambda,\ \ 1+r^2\lambda)$$

$r>0$, $0<t<1$ のとき, $p\circ\overline{\beta}_{1,n}\circ Sh$ が $S^{2n+1}-\boldsymbol{e}_{n+1}$ の上への 1 対 1 であることが容易に確かめられるから, $p\circ\overline{\beta}_{1,n}$ もそうで相対同相となる.　(終)

定理 5.4　$\overline{\beta}_{1,n}:S(P_n(\boldsymbol{C}))\to SU(n+1)$ は中への同相. $e^{2n+1}=\overline{\beta}_{1,n}(S(P_n(\boldsymbol{C}))-S(P_{n-1}(\boldsymbol{C})))$ とし, $SU(n+1)$ の積によって e^{2a_i+1} の積 $e^{2a_1+1}\cdot\cdots\cdot e^{2a_r+1}$ を定義するとき, $e^0=\{I_{n+1}\}$ と $e^{2a_1+1}\cdot\cdots\cdot e^{2a_r+1}(n\geq a_1>a_2>\cdots>a_r\geq 1)$ 全体は $SU(n+1)$ の胞体分割を与える.

［証明］　補題 5.3 から $\overline{\beta}_{1,n}$ が 1 対 1, 従って中への同相であることがわかる. SD^{2n} は D^{2n+1} と同相であるから, 相対同相 $\overline{\beta}_{1,n}\circ Sh$ は e^{2n+1} の特性写像を与え, $\partial e^{2n+1}\subset\overline{\beta}_{1,n-1}(S(P_{n-1}(\boldsymbol{C})))=e^0\cup e^3\cup\cdots\cup e^{2n-1}$ である. また射影 $p:SU(n+1)\to S^{2n+1}=SU(n+1)/SU(n)$ と $SU(n)$ の作用を考えれば, $SU(n+1)$ の積は $e^{2n+1}\times SU(n)$ から $SU(n+1)-SU(n)$ の上への同相を与えていることがわかる. よって, n に関する帰納法で定理の胞体分割がえられる.　(終)

$\beta_{1,n}:P_n(\boldsymbol{C})\longrightarrow\Omega SU(n+1)$ を $\overline{\beta}_{1,n}$ の随伴写像とする.

補題 5.5　(1)　ホモロジー環 $H_*(\Omega SU(n+1))=\boldsymbol{Z}[e_2,\ e_4,\ \cdots,\ e_{2n}]$ は $\beta_{1,n*}:H_*(P_n(\boldsymbol{C}))\to H_*(\Omega SU(n+1))$ の像によって乗法的に生成される.

$$\begin{array}{ccc}P_n(\boldsymbol{C}) & \xrightarrow{\ f\ } & \boldsymbol{BU}\\ \downarrow{\scriptstyle\beta_{1,n}} & & \downarrow{\scriptstyle\boldsymbol{\beta}}\\ \Omega SU(n+1) & \xrightarrow{\ \Omega i\ } & \Omega\boldsymbol{SU}\end{array}$$

(2)　右の図式がホモトピー可換となる写

像 $f:P_n(\boldsymbol{C})\to \boldsymbol{BU}$ がある．ただし $i:SU(n+1)\to \boldsymbol{SU}$ は射入．

［証明］　(1)　下の可換な図式において，

$$\begin{array}{ccccc}
H_{2n}(P_n(\boldsymbol{C})) & \xrightarrow{\beta_{1,n*}} & H_{2n}(\Omega SU(n+1)) & \xrightarrow{\Omega p_*} & H_{2n}(\Omega S^{2n+1}) \\
\cong\downarrow S & & \downarrow\Sigma & & \downarrow\Sigma \\
H_{2n+1}(S(P_n(\boldsymbol{C}))) & \xrightarrow{\bar{\beta}_{1,n*}} & H_{2n+1}(SU(n+1)) & \xrightarrow{p_*} & H_{2n+1}(S^{2n+1})
\end{array}$$

S は同型，$p_*\circ\bar{\beta}_{1,n*}$ も補題5.3によって同型である．

生成元 e_{2n} は $\sum\Omega p_* e_{2n}$ が $H_{2n+1}(S^{2n+1})$ の生成元となるものとしてとることができる(定理2.8)．このとき e_{2n} は $\beta_{1,n*}$ の像である．他の生成元 e_2, $\cdots$, e_{2n-2} は $H_*(\Omega SU(n))$ からの像にとれる．補題5.3より，$\beta_{1,n-1}=\beta_{1,n}|\Omega SU(n)$ である．n に関する帰納法により(1)をえる．

(2)　単射 $\alpha:\boldsymbol{N}\to\boldsymbol{N}$ を，$\alpha(1)=1$, $\alpha(i)=n+i-1\ (i>1)$ にとり，$f_\alpha:U(n+1)\to U(2n)$ を考えれば，f_α は $f_\alpha:SU(n+1)\to SU(2n)$，$f_\alpha:P_n(\boldsymbol{C})\to U(2n)/U(n)\times U(n)$ を誘導し，$\Omega f_\alpha\circ\beta_{1,n}=\beta(n)\circ f_\alpha:P_n(\boldsymbol{C})\to\Omega(SU(2n))$ をみたす．$f=\tau_n\circ f_\alpha$ とおけば，$\boldsymbol{\beta}$ の定義から $\boldsymbol{\beta}\circ f=\Omega i\circ\Omega\tau_n\circ\beta_{1,n}$．$\tau_n(A)=P_\tau AP_\tau{}^{-1}$ となる置換行列 $P_\tau\in U(2n)$ と I_{2n} を結ぶ $U(2n)$ 内の道を使えば，$\tau_n\simeq 1\Longrightarrow\Omega\tau_n\simeq 1\Longrightarrow\boldsymbol{\beta}\circ f\simeq\Omega i\circ\beta_{1,n}$．　(終)

K-群の周期性

定理 5.6　$\boldsymbol{\beta}:\boldsymbol{BU}\to\Omega\boldsymbol{SU}$ は(弱)ホモトピー同値である．

［証明］　系1.6によって，$\boldsymbol{\beta}_*:H_*(\boldsymbol{BU})\cong H_*(\Omega\boldsymbol{SU})$ をいえばよい．次数 $2n$ 以下で $\Omega i_*: H_*(\Omega SU(n+1))\to H_*(\Omega\boldsymbol{SU})$ は同型であるから，補題5.5により $H_*(\Omega\boldsymbol{SU})=\boldsymbol{Z}[e_2, e_4, \cdots, e_{2n}, \cdots]$ は $\mathrm{Im}\,\boldsymbol{\beta}_*$ で乗法的に生成される．$\boldsymbol{\beta}$ は H-写像(補題5.1)であるから，$\boldsymbol{\beta}_*$ は環の準同型 $\Longrightarrow\boldsymbol{\beta}_*$ は全射．一方，定理2.8と(3.17)により，$H_*(\boldsymbol{BU})$ は $H_*(\Omega\boldsymbol{SU})$ と各次数で同型な自由アーベル群であるから，$\boldsymbol{\beta}_*$ は同型．　(終)

系 5.7　(1)　(弱)ホモトピー同値である H-写像 $\boldsymbol{BU}\times\boldsymbol{Z}\to\Omega\boldsymbol{U}$ がある．

(2)　$\tilde{K}(S^{2n})\cong\pi_{2n}(\boldsymbol{BU})\cong\pi_{2n-1}(\boldsymbol{U})\cong\boldsymbol{Z}\qquad(n\geq 1)$

$\tilde{K}(S^{2n-1})=\pi_{2n-1}(\boldsymbol{BU})=\pi_{2n-2}(\boldsymbol{U})=0\quad(n\geq 1)$

［証明］　(1)　$\pi_1(\boldsymbol{U})\cong\pi_1(U(1))\cong\boldsymbol{Z}\Longrightarrow\Omega\boldsymbol{U}$ は $\Omega_0\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{Z}$ と H-空間として同相．$\pi_i(\boldsymbol{SU})\cong\pi_i(\boldsymbol{U})\,(i\geq 1)\Longrightarrow\pi_i(\Omega\boldsymbol{SU})\cong\pi_i(\Omega_0\boldsymbol{U})\,(i\geq 0)\Longrightarrow\Omega\boldsymbol{SU}\longrightarrow\Omega_0 U$ は

弱ホモトピー同値．これらより(1)をうる．

(2)は $n=1$ のとき自明．$i>0 \Longrightarrow \pi_i(\boldsymbol{BU}) \cong \pi_i(\boldsymbol{BU}\times\boldsymbol{Z}) \cong \pi_i(\Omega\boldsymbol{U}) \cong \pi_{i+1}(\boldsymbol{U}) \cong \pi_{i+2}(\boldsymbol{BU}) \Longrightarrow \pi_i(\boldsymbol{BU}) \cong \pi_{i+2k}(\boldsymbol{BU})$．よって，(2)をうる．（終）

Bott の写像 $\boldsymbol{\beta}:\boldsymbol{BU}\to\Omega\boldsymbol{SU}$ の随伴写像を $\bar{\boldsymbol{\beta}}:S\boldsymbol{BU}\to\boldsymbol{SU}$, $\bar{\boldsymbol{\beta}}$ の随伴写像を

$$\textstyle\sum\bar{\boldsymbol{\beta}}=\sigma_{SU}\circ S\bar{\boldsymbol{\beta}}:S^2\boldsymbol{BU}\longrightarrow\boldsymbol{SSU}\longrightarrow\boldsymbol{BSU}$$

補題 5.8　(1)　$(\sum\bar{\boldsymbol{\beta}})^*(c_{k+1})=\pm S^2s_k(c_1,\cdots,c_n)$，$\boldsymbol{\beta}^*\sigma^2(c_{k+1})=\pm s_k(c_1,\cdots,c_k)$，$k\geq 1$．ここで，$s_k(c_1,\cdots,c_k)=k!ch_k=c_1{}^k+\cdots+(-1)^{k-1}kc_k$．

(2)　$ch_n:\tilde{K}(S^{2n})\to H^{2n}(S^{2n};\boldsymbol{Q})\cong\boldsymbol{Q}$ の像は $H^{2n}(S^{2n})\cong\boldsymbol{Z}$ に一致する．

(3)　$\pi_{2n}(\boldsymbol{BU})$ の生成元 $[g_n]$，$H^{2n}(S^{2n})$ の生成元 u_{2n} について，

$$g_n{}^*(c_n)=\pm(n-1)!u_{2n}$$

［証明］　(1)　懸垂準同型 $\sigma:H^{2k+2}(\boldsymbol{BSU})\to H^{2k+1}(\boldsymbol{SU})$，$\sigma:H^{2k+1}(\boldsymbol{SU})\to H^{2k}(\Omega\boldsymbol{SU})$ による c_{k+1} の像 $\sigma^2(c_{k+1})$ は原始的である(補題 2.16)．$\boldsymbol{\beta}^*:H^*(\Omega\boldsymbol{SU})\cong H^*(\boldsymbol{BU})$ は Hopf 代数の同型であるから，$\boldsymbol{\beta}^*\sigma^2(c_{k+1})\in H^{2k}(\boldsymbol{BU})$ は原始的．定理 2.18 によって，$\boldsymbol{\beta}^*\sigma^2(c_{k+1})=as_k(c_1,\cdots,c_k)$ となる $a\in\boldsymbol{Z}$ がある．a を定めるために，補題 5.5(2)の証明に用いた射入 $f_\alpha:P_n(\boldsymbol{C})=U(n+1)/U(1)\times U(n)\to U(2n)/U(n)\times U(n)$ を考える．同じ α を使って $f_\alpha:U(m+1)/U(1)\times U(m)\to U(n+m)/U(n)\times U(m)$ が定義され m を大にした極限として，$p_\alpha:BU(1)\to BU(n)$ がえられる．f_α と p_α は $2n$ 次元以下のコホモロジー群では同値な準同型を与える．$p_\alpha{}^*(c_1)=c_1$，$p_\alpha{}^*(c_i)=0$ $(i>1)$ であるから，同様の式が $f_\alpha{}^*$ について成立する．従って，補題 5.5 の写像 $f:P_n(\boldsymbol{C})\to\boldsymbol{BU}$ $(n>k)$ について，$f^*(c_1)=t$ は $H^2(P_n(\boldsymbol{C}))$ の生成元，$f^*(c_i)=0$ $(i>1)\Longrightarrow f^*\boldsymbol{\beta}^*\sigma^2(c_{k+1})=a\,f^*s_k(c_1,\cdots,c_k)=af^*(c_1{}^k)=at^k$．

一方，$H^*(SU(n+1))=\Lambda(\sigma(c_2),\cdots,\sigma(c_{n+1}))$．定理 5.4 によって，$\bar{\beta}_{1,n*}:H_*(S(P_n(\boldsymbol{C})))\to H_*(SU(n+1))$ は単射 $\Longrightarrow\bar{\beta}_{1,n}{}^*:H^*(SU(n+1))\to H^*(S(P_n(\boldsymbol{C})))$ は全射．一般に α, $\beta\in H^*(SX)\Longrightarrow\alpha\cdot\beta=0$ であるから，$\bar{\beta}_{1,n}{}^*\sigma(c_{k+1})$ は $H^{2k+1}S(P_n(C)))$ の生成元でなければならない．下の図式の可換性から，$\beta_{1,n}{}^*(c_{k+1})=\pm t^k$ をうる．補題 5.5(2)より，

$\pm t^k=\beta_{1,n}{}^*\,(\sigma^2(c_{n+1}))=f^*\boldsymbol{\beta}^*\,\sigma^2(c_{k+1})=at^k\Longrightarrow a=\pm 1$．即ち，$\boldsymbol{\beta}^*\sigma^2(c_{k+1})\neq\pm s_k(c_1,\cdots,c_k)$．

$$\begin{array}{ccc}
H^{2k+1}(SU(n+1)) & \xrightarrow{\bar{\beta}_{1,n}{}^*} & H^{2k+1}(S(P_n(\boldsymbol{C}))) \\
\downarrow\sigma & & \cong\downarrow S^{-1} \\
H^{2k+1}(\Omega SU(n+1)) & \xrightarrow{\beta_{1,n}{}^*} & H^{2k}(P_n(\boldsymbol{C}))
\end{array}$$

$\sum\bar{\boldsymbol{\beta}}$ は $\boldsymbol{\beta}$ の随伴写像であることから，$(\sum\bar{\boldsymbol{\beta}})^*(c_{k+1})=S^2\boldsymbol{\beta}^*(c_{k+1})$.

(2)　$g_n: S^{2n}\to \boldsymbol{BU}$ を $\tilde{K}(S^{2n})\cong[S^{2n}, \boldsymbol{BU}]_0=\pi_{2n}(\boldsymbol{BU})\cong\boldsymbol{Z}$ の生成元を表わす写像とする．そのとき，$g_{n+1}=\sum\bar{\boldsymbol{\beta}}\circ S^2g_n: S^{2n+2}\to S^2\boldsymbol{BU}\to \boldsymbol{BSU}\to\boldsymbol{BU}$ は $\tilde{K}(S^{2n+2})$ の生成元を表わすことは容易にわかる．よって，g_n は $g_1: S^2=P_1(\boldsymbol{C})\xrightarrow{f}\boldsymbol{BU}$ からこのように順次作ったものとする．補題5.5から，容易に $g_1^*(c_1)=u_2$ は $H^2(S^2)$ の生成元．$g_n^*(c_n)=b_nu_{2n}$, $b_n\in\boldsymbol{Z}$,（$u_{2n}=S^2(u_{2n-2})$ は $H^{2n}(S^{2n})$ の生成元）とおけば，(1)と $g_n^*(c_i)=0$ $(i\neq 0, n)$ より

$$\begin{aligned}b_{n+1}\cdot u_{2n+2}=g_*{}^{n+1}(c_{n+1})&=(S^2g_n)^*(\textstyle\sum\bar{\boldsymbol{\beta}})^*(c_{n+1})=\pm(S^2g_n)^*S^2s_k\\&=\pm(S^2g_n)^*(c_1{}^n+\cdots+(-1)^{n-1}nc_n)\\&=\pm(-1)^{n-1}n(S^2g_n)^*(c_n)=\pm(-1)^{n-1}n\cdot b_n\cdot u_{2n+2}\end{aligned}$$

従って帰納的に $b_n=\pm(n-1)!$.　$ch_n=\dfrac{1}{n!}s_k=\dfrac{1}{n!}c_1{}^n+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{1}{(n-1)!}c_n$ より，

$$\begin{aligned}ch_n\{g_n\}&=g_n{}^*\left(\frac{1}{n!}c_1{}^n+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!}c_n\right)=(-1)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!}g_n{}^*(c_n)\\&=\pm u_{2n}\end{aligned}$$

(3)は上の考察より明らか．　　(終)

定理 5.9 (***K*-群の周期性**)　X を有限次元 CW-複体とする．

(1)　$\otimes: K(X)\otimes K(S^2)\cong K(X\times S^2)$　(同型)

(2)　$\wedge: \tilde{K}(X)\otimes\tilde{K}(S^2)\cong\tilde{K}(X\wedge S^2)=\tilde{K}(S^2X)$　(同型)

いいかえると，$\tilde{K}(S^2)$ の生成元 g について $\wedge g: \tilde{K}(X)\cong\tilde{K}(S^2X)$.

［証明］　直和分解 $K(X)\cong\tilde{K}(X)\oplus\boldsymbol{Z}$, $K(X\times S^2)\cong\tilde{K}(X\wedge S^2)\oplus\tilde{K}(X)\oplus\tilde{K}(S^2)\oplus\boldsymbol{Z}$ を考えることによって，(1)と(2)は同値であることがわかる．X が連結でないときは，各成分に分けることによって，(1)は X が連結な場合に帰着される．従って，連結な X について，(2)を証明すればよい．さらに，連結な X は，ただ1つの頂点を基点にもち各胞体の接着写像が基点を保つような CW-複体とホモトピー同値であるから，このような条件をみたしているとしてよい．

補題5.8により，$\tilde{K}(S^2$ の生成元 g について $ch(g)=s$ は $H^2(S^2)$ の生成元である．$g^n=g\wedge\cdots\wedge g$ (n 個) について $ch(g^n)=s\wedge\cdots\wedge s$ は $H^{2n}(S^{2n})$ の生成元であるから，補題5.8によって，g^n は $\tilde{K}(S^{2n})$ の生成元．従って，(2)は $X=S^{2n}$

$(n\geq 1)$ について成り立つ．$X=S^{2n-1}$ については，$\tilde{K}(X)=\tilde{K}(S^2X)=0$ であるから(2)は自明．1点和 $\vee S_\alpha^m$ について，$\tilde{K}(\vee S_\alpha^m)=\sum_\alpha \tilde{K}(S_\alpha^m)$ を使えば，(2)は $X=\vee S_\alpha^m$ について成り立つ．特に，$\dim Y\leq 1 \Longrightarrow Y=1$点 または $Y=\vee S_\alpha^1 \Longrightarrow X=Y$，$X=SY$ のとき(2)が成り立つ．

帰納的に，$\wedge g$ は $\dim X<N$ のとき同型，$\dim X=N$ のとき全射であることを示す．$\dim X=m+1$ とすれば，X の m-切片 X^m について写像 $f:\vee S_\alpha^m\to X^m$ があって，$X=C_f$ は f の写像錐．(4.13)によって次の完全かつ可換な図式がえられる：

$$\begin{array}{ccccccccc}
\tilde{K}(SX^m) & \xrightarrow{Sf^*} & \tilde{K}(S(\vee S_\alpha^m)) & \xrightarrow{\pi^*} & \tilde{K}(X) & \xrightarrow{i^*} & \tilde{K}(X^m) & \xrightarrow{f^*} & \tilde{K}(\vee S_\alpha^m) \\
\downarrow \wedge g & & \downarrow \wedge g & & \downarrow \wedge g & & \downarrow \wedge g & & \downarrow \wedge g \\
\tilde{K}(S^3X^m) & \xrightarrow{S^3f^*} & \tilde{K}(S^3(\vee S_\alpha^m)) & \xrightarrow{S^2\pi^*} & \tilde{K}(S^2X) & \xrightarrow{S^2i_*} & \tilde{K}(S^2X^m) & \longrightarrow & \tilde{K}(S^2(\vee S_\alpha^m))
\end{array}$$

$m=N$，$N+1$ のとき5-補題を適用して $\wedge g$ は $\dim X\leq N$ で同型，$\dim X=N+1$ で全射，をうる．よって，(2)は帰納法で証明される．　（終）

KO-群の周期性

定理 5.10　$\boldsymbol{\beta_O}:\boldsymbol{O/U}\to\boldsymbol{\Omega SO}$ は(弱)ホモトピー同値である．

［証明］　$\beta_O(1):O(2)/U(1)=2$ 点$\to\Omega SO(2)$ を考える．$J=1\oplus(-1)$ について，$JS_t(1)J^{-1}=S_{-t}(1)=S_t(1)^{-1}$ であることから，$\beta_O(1)\{J\}(t)=S_{-t}(1)^2=S_{-2t}(1)$．従って，$\beta_O(1)\{J\}$は $\pi_1(\Omega SO(2))\cong\boldsymbol{Z}$ の生成元 $(-\iota_1)$ を表わす．このことから $\boldsymbol{\beta_O}$ は $\boldsymbol{O/U}$ の2つの成分をそれぞれ $\boldsymbol{\Omega SO}$ の2つの成分へ写していることがわかる．$\boldsymbol{\beta_O}$ が H-写像であることから，定理はその1つの成分への制限 $\boldsymbol{\beta_O}:\boldsymbol{SO/U}\to\boldsymbol{\Omega_0 SO}$ について証明すれば十分である．補題5.2より下の可換な図式がえられる．(3.18)によって，$H^*(\boldsymbol{SO/U})$ の生成元 e_{2n} について，$2e_{2n}$ は $\boldsymbol{j_R}^*$ の像である．定理5.6により $\boldsymbol{\beta}^*$ は同型であるから，$2e_{2n}=\boldsymbol{\beta_O}^*(\Omega\boldsymbol{i_C}^*(x))$ となる $x\in H^{2n}(\boldsymbol{\Omega SU})$ がある．

$$\begin{array}{ccc}
H^*(\boldsymbol{\Omega SU}) & \xrightarrow{\boldsymbol{\beta}^*} & H^*(\boldsymbol{BU}) \\
\downarrow \Omega\boldsymbol{i_C}^* & & \downarrow \boldsymbol{j_R}^* \\
H^*(\boldsymbol{\Omega_0 SO}) & \xrightarrow{\boldsymbol{\beta_O}^*} & H^*(\boldsymbol{SO/U})
\end{array}$$

補題3.15により，$2y=\Omega\boldsymbol{i_C}^*(x)$ となる $y\in H^{2n}(\boldsymbol{\Omega_0 SO})$ がある．$H^*(\boldsymbol{SO/U})$ が自由アーベル群であることから，$\boldsymbol{\beta_O}^*(2y)=2e_{2n}\Longrightarrow\boldsymbol{\beta_O}^*(y)=e_{2n}\Longrightarrow\boldsymbol{\beta_O}^*$ は全射．(3.13), (3.13)*, (3.18)によって，$H^*(\boldsymbol{\Omega_0 SO})$ と $H^*(\boldsymbol{SO/U})$ は各次数で同じ階数の自由アーベル群であるから $\boldsymbol{\beta_O}^*$ は同型．系1.6により $\boldsymbol{\beta_O}$ は(弱)ホモ

トピー同値.　(終)

補題 5.11　$n\geq 1$, η を $\widetilde{KO}(S^1)\cong \boldsymbol{Z}_2$ の生成元, g を $\tilde{K}(S^2)\cong \boldsymbol{Z}$ の生成元とするとき, 次の系列は完全である：

$$\widetilde{KO}(S^{n+1})\xrightarrow{\wedge\eta}\widetilde{KO}(S^{n+2})\xrightarrow{(\wedge g)^{-1}\circ c}\tilde{K}(S^n)\xrightarrow{r}\widetilde{KO}(S^n)\xrightarrow{\wedge\eta}\widetilde{KO}(S^{n+1})$$

［証明］ $\boldsymbol{U}\xrightarrow{i}\boldsymbol{O}\xrightarrow{\pi}\boldsymbol{O}/\boldsymbol{U}$ で誘導される $\pi_{n-1}(\boldsymbol{U})\xrightarrow{i_*}\pi_{n-1}(\boldsymbol{O})\xrightarrow{\pi_*}\pi_{n-1}(\boldsymbol{O}/\boldsymbol{U})$ は, 十分大きい N をとるとき, $\pi_{n-1}(U(N))\xrightarrow{i_*}\pi_{n-1}(O(2N))\xrightarrow{\pi_*}\pi_{n-1}(O(2N)/U(N))$ と同値であるから完全. 同型 $\pi_{n-1}(\boldsymbol{G})\cong\pi_n(\boldsymbol{BG})\cong\widetilde{KG}(S^n)$ と $\pi_{n-1}(\boldsymbol{SO}/\boldsymbol{U})\cong\pi_{n-1}(\Omega_0\boldsymbol{SO})\cong\pi_n(\boldsymbol{SO})\cong\widetilde{KO}(S^{n+1})$ で書き直せば,

$$\tilde{K}(S^n)\xrightarrow{r}\widetilde{KO}(S^n)\xrightarrow{h}\widetilde{KO}(S^{n+1})$$

は完全. ここで h は π_* に対応するものとする. 同様に, $\boldsymbol{O}\xrightarrow{\pi}\boldsymbol{O}/\boldsymbol{U}\xrightarrow{j_R}\boldsymbol{BU}$, $\boldsymbol{O}/\boldsymbol{U}\xrightarrow{j_R}\boldsymbol{BU}\xrightarrow{\rho_R}\boldsymbol{BO}$ に関するホモトピー完全系列がえられるが $\boldsymbol{j}_{R*}$ は補題 5.2 と定理 5.6, 定理 5.10 によって, $\boldsymbol{c}:\widetilde{KO}(S^{n+2})\to\tilde{K}(S^{n+2})$ を同型 $\tilde{K}(S^{n+2})\cong\pi_n(\Omega\boldsymbol{SU})\xrightarrow{\beta_*^{-1}}\pi_n(\boldsymbol{BU})\cong\tilde{K}(S^n)$ でおきかえたものに対応する. 定理 5.9 は $\boldsymbol{\beta}_*^{-1}$ を $(\wedge g)^{-1}$ でおきかえてよいことを示している. 結局 $h=\wedge\eta$ であることを示せばよいことになる. h は $\boldsymbol{\beta_O}\circ\boldsymbol{\pi}:\boldsymbol{O}\to\boldsymbol{O}/\boldsymbol{U}\to\Omega\boldsymbol{SO}$, $\beta_O(N)\circ\pi:O(2N)\to O(2N)/U(N)\to\Omega SO(2N)$ で誘導されるものと同値である. $(\beta_O(N)\circ\pi)(A)=AS_t(N)A^{-1}S_t(N)^{-1}$ であるから, 補題 4.22 によって, これは $\wedge\eta$ を誘導する.　(終)

定理 5.12　$n\geq 1$ とする. $\widetilde{KO}(S^n)\cong\pi_n(\boldsymbol{BO})\cong\pi_{n-1}(\boldsymbol{O})$ は $n\equiv 0,1,2,3,4,5,6,7 \pmod 8$ の場合に応じてそれぞれ $\boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{Z}_2$, $\boldsymbol{Z}_2$, 0, $\boldsymbol{Z}$, 0, 0, 0 に同型.

$n\equiv 0 \pmod 8 \Longrightarrow \boldsymbol{c}:\widetilde{KO}(S^n)\cong\tilde{K}(S^n)$

$n\equiv 1,2 \pmod 8 \Longrightarrow \wedge\eta:\widetilde{KO}(S^{n-1})\longrightarrow\widetilde{KO}(S^n)$ は全射.

$n\equiv 4 \pmod 8 \Longrightarrow \boldsymbol{c}:\widetilde{KO}(S^n)\longrightarrow\tilde{K}(S^n)$ は $2(\tilde{K}(S^n))$ の上への同型.

［証明］ $n=1$ のときはよく知られている. $\widetilde{KO}(S^2)\cong\pi_1(\boldsymbol{O})\cong\pi_1(\boldsymbol{SO})\cong\boldsymbol{Z}_2$ の生成元は定理 5.10 の証明の最初の部分に見られるように $\beta_O(1)(J)$ で表わされ, 補題 4.22 により, $\eta\wedge\eta$ が生成元である. $\widetilde{KO}(S^3)\cong\pi_2(\boldsymbol{SO})\cong\pi_2(SO(4))\cong\pi_2(\mathrm{Spin}(4))\cong\pi_2(Sp(1)\times Sp(1))$. $Sp(1)$ は 2-連結であるから, $\widetilde{KO}(S^3)=0$. $n\geq 4$ に対しては n に関する帰納法を補題 5.11 の完全系列に適用する.

$n\equiv 4 \pmod 8 \Longrightarrow 0=\widetilde{KO}(S^{n-1})\longrightarrow\widetilde{KO}(S^n)\xrightarrow{(\wedge g)^{-1}\circ c}\tilde{K}(S^{n-2})\xrightarrow{r}\widetilde{KO}(S^{n-2})\xrightarrow{\wedge\eta}\widetilde{KO}(S^{n-1})=0$ において, $\widetilde{KO}(S^{n-2})\cong\boldsymbol{Z}_2$, $\tilde{K}(S^{n-2})\cong\boldsymbol{Z}$ であるから, $\boldsymbol{c}:\widetilde{KO}(S^n)\to\tilde{K}(S^n)$ は $2(\tilde{K}(S^n))$ の上への同型で, $\widetilde{KO}(S^n)\cong\boldsymbol{Z}$.

$n\equiv 5 \pmod 8 \Longrightarrow \tilde{K}(S^{n-1}) \xrightarrow{r} \widetilde{KO}(S^{n-1}) \longrightarrow \widetilde{KO}(S^n) \longrightarrow \tilde{K}(S^{n-2})=0$ において，$\boldsymbol{r}\circ\boldsymbol{c}=2$ と $\boldsymbol{c}:\widetilde{KO}(S^{n-1})\to\tilde{K}(S^{n-1})$ が 2 倍する準同型であることから $\boldsymbol{r}$ は同型$\Longrightarrow \widetilde{KO}(S^n)=0$.

$n\equiv 6 \pmod 8 \Longrightarrow 0=\widetilde{KO}(S^{n-1})\to\widetilde{KO}(S^n)\to\tilde{K}(S^{n-2})\xrightarrow{r}\widetilde{KO}(S^{n-2})$ において，$\boldsymbol{r}$ は上のように同型$\Longrightarrow \widetilde{KO}(S^n)=0$.

$n\equiv 7 \pmod 8 \Longrightarrow 0=\widetilde{KO}(S^{n-1})\to\widetilde{KO}(S^n)\to\tilde{K}(S^{n-2})=0$ は完全$\Longrightarrow \widetilde{KO}(S^n)=0$.

$n\equiv 0 \pmod 8 \Longrightarrow 0=\widetilde{KO}(S^{n-1})\longrightarrow\widetilde{KO}(S^n)\xrightarrow{(\wedge g)^{-1}\circ \boldsymbol{c}}\tilde{K}(S^{n-2})\longrightarrow\widetilde{KO}(S^{n-1})=0$ は完全$\Longrightarrow \boldsymbol{c}:\widetilde{KO}(S^n)\cong\tilde{K}(S^n)\cong\boldsymbol{Z}$. $\boldsymbol{r}\circ\boldsymbol{c}=2$ より，$\boldsymbol{r}:\tilde{K}(S^n)\to\widetilde{KO}(S^n)$ につき Coker $\boldsymbol{r}\cong\boldsymbol{Z}_2$.

$n\equiv 1 \pmod 8 \Longrightarrow 0\longrightarrow \mathrm{Coker}\,\boldsymbol{r}(\cong\boldsymbol{Z}_2)\xrightarrow{\wedge\eta}\widetilde{KO}(S^n)\longrightarrow\tilde{K}(S^{n-2})=0$ は完全$\Longrightarrow$ $\widetilde{KO}(S^n)\cong\boldsymbol{Z}_2$，$\wedge\eta:\widetilde{KO}(S^{n-1})\longrightarrow\widetilde{KO}(S^n)$ は全射.

$n\equiv 2 \pmod 8 \Longrightarrow 0=\tilde{K}(S^{n-1})\longrightarrow\widetilde{KO}(S^{n-1})\xrightarrow{\wedge\eta}\widetilde{KO}(S^n)\longrightarrow\tilde{K}(S^{n-2})\cong\boldsymbol{Z}$ は完全$\Longrightarrow \wedge\eta:\widetilde{KO}(S^{n-1})\cong\widetilde{KO}(S^n)(\cong\boldsymbol{Z}_2)$.

$n\equiv 3 \pmod 8 \Longrightarrow \widetilde{KO}(S^{n-1})\xrightarrow{\wedge\eta}\widetilde{KO}(S^n)\longrightarrow\tilde{K}(S^{n-2})=0$ は完全．上の考察から $\eta^3=\eta\wedge\eta\wedge\eta$ について $\wedge\eta^3:\widetilde{KO}(S^{n-3})\to\widetilde{KO}(S^n)$ は全射．一方，$\eta^3\in\widetilde{KO}(S^3)=0$ より $\widetilde{KO}(S^n)=0$.　(終)

定理 5.13　(***KO*-群の周期性**)　X を有限次元 CW-複体とする.

(1)　$\otimes: KO(X)\otimes KO(S^8)\cong KO(X\times S^8)$　(同型)

(2)　$\wedge:\widetilde{KO}(X)\otimes\widetilde{KO}(S^8)\cong\widetilde{KO}(X\wedge S^8)=\widetilde{KO}(S^8X)$　(同型)

いいかえると，$\widetilde{KO}(S^8)$ の生成元 σ について，$\wedge\sigma:\widetilde{KO}(X)\cong\widetilde{KO}(S^8X)$.

［証明］　定理 5.9 の証明と同様に考えれば，$\wedge\sigma:\widetilde{KO}(S^n)\cong\widetilde{KO}(S^{n+8})$ が $n\geq 1$ で示されればよいことがわかる．$n\not\equiv 0, 1, 2, 4 \pmod 8$ のとき，これは自明．定理 5.12 により，生成元 σ は $\boldsymbol{c}(\sigma)=g^4$ にとれる．$\sigma^k=\sigma\wedge\cdots\wedge\sigma$ (k 個)とおく．$\boldsymbol{c}$ は環の準同型$\Longrightarrow \boldsymbol{c}(\sigma^k)=g^{4k}\Longrightarrow\sigma^k$ は $\widetilde{KO}(S^{8k})$ の生成元$\Longrightarrow\sigma^k\wedge\eta=\eta\wedge\sigma^k$ は $\widetilde{KO}(S^{8k+1})$ の生成元$\Longrightarrow\sigma^k\wedge\eta^2=\eta^2\wedge\sigma^k$ は $\widetilde{KO}(S^{8k+2})$ の生成元．$\widetilde{KO}(S^4)$ は $\boldsymbol{c}(\nu)=2g^2$ をみたす元 ν で生成される．$\boldsymbol{c}(\nu\wedge\sigma^k)=2g^2\wedge g^{4k+2}\Longrightarrow\nu\wedge\sigma^k$ は $\widetilde{KO}(S^{8k+4})$ の生成元．以上のことから $\wedge\sigma:\widetilde{KO}(S^n)\cong\widetilde{KO}(S^{n+8})$，$n\geq 1$，がわかる．(終)

***KSp*-群の周期性**

定理 5.14　$\boldsymbol{\beta}_{Sp}:\boldsymbol{Sp/U\to\Omega Sp}$ は(弱)ホモトピー同値である.

［証明］ これらは 1-連結であり，しかも (3.18) より，$j_{c'}{}^*: H^*(\boldsymbol{BU})\to H^*(\boldsymbol{Sp}/\boldsymbol{U})$ が全射であるから，補題 5.2，(3.13)，(3.18) により証明される．（終）

補題 5.15　$n\geq 1$，η を $\widetilde{KO}(S^1)$ の生成元，g を $\tilde{K}(S^2)$ の生成元とするとき次の系列は完全：

$$\widetilde{KSp}(S^{n+1})\xrightarrow{\wedge\eta}\widetilde{KSp}(S^{n+2})\xrightarrow{(\wedge g)^{-1}\circ \boldsymbol{c}'}\tilde{K}(S^n)\xrightarrow{\boldsymbol{q}}\widetilde{KSp}(S^n)\xrightarrow{\wedge\eta}\widetilde{KSp}(S^{n+1})$$

［証明］ 補題 5.11 と同様.　（終）

定理 5.16　$n\geq 1$ とする．$\widetilde{KSp}(S^n)\cong\pi_n(\boldsymbol{BSp})\cong\pi_{n-1}(\boldsymbol{Sp})$ は $n\equiv 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \pmod 8$ の場合に応じてそれぞれ $\boldsymbol{Z}$, 0, 0, 0, $\boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{Z}_2$, $\boldsymbol{Z}_2$, 0 に同型.

$n\equiv 0 \pmod 8 \Longrightarrow \boldsymbol{c}': \widetilde{KSp}(S^n)\to\tilde{K}(S^n)$ は $2(\tilde{K}(S^n))$ の上への全射.

$n\equiv 4 \pmod 8 \Longrightarrow \boldsymbol{c}': \widetilde{KSp}(S^n)\cong\tilde{K}(S^n)$

$n\equiv 5, 6 \pmod 8 \Longrightarrow \wedge\eta: \widetilde{KSp}(S^{n-1})\longrightarrow\widetilde{KSp}(S^n)$ は全射.

［証明］ $\boldsymbol{Sp}$ は 2-連結であるから $n\leq 3$ で自明．$n\geq 4$ のときは補題 5.15，$\boldsymbol{c}'\circ\boldsymbol{q}=2$ および $\eta^3=0$ を使って，定理 5.12 と同様に証明される．（終）

定理 5.17　(***KSp*-群の周期性**)　X を有限次元 CW-複体とする．

(1)　$\hat{\otimes}: KSp(X)\otimes KO(S^8)\cong KSp(X\times S^8)$　（同型）

(2)　$\wedge: \widetilde{KSp}(X)\otimes\widetilde{KO}(S^8)\cong\widetilde{KSp}(X\wedge S^8)=\widetilde{KSp}(S^8X)$　（同型）

いいかえると，$\widetilde{KO}(S^8)$ の生成元 σ について，$\wedge\sigma: \widetilde{KSp}(X)\cong\widetilde{KSp}(S^8X)$.

［証明］ $\nu\in\widetilde{KSp}(S^4)$，$\mu\in\widetilde{KSp}(S^8)$ を $\boldsymbol{c}'(\nu)=g^2$，$\boldsymbol{c}'(\mu)=2g^2$ にえらべば，$\nu\wedge\sigma^k$，$\mu\wedge\sigma^k$，$\mu\wedge\sigma^k\wedge\eta$，$\mu\wedge\sigma^k\wedge\eta^2$ がそれぞれ，$\widetilde{KSp}(S^{8k+j})$，$j=4, 8, 9, 10$ の生成元となる．あとは定理 5.13 と同様.　（終）

§6　古典群と等質空間のホモトピー群

無限次元対称空間のホモトピー群

$\boldsymbol{BG}$ および $\boldsymbol{G}$ のホモトピー群は $\boldsymbol{G}=\boldsymbol{U}, \boldsymbol{O}, \boldsymbol{Sp}$ のとき §5 で決定されている．$\boldsymbol{G}=\boldsymbol{SU}$, $\boldsymbol{SO}$ のときは，$\boldsymbol{G}=\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{O}$ のときと高次元では同型で，異なるのは次の場合のみである：

$$\pi_1(\boldsymbol{BSO})=\pi_0(\boldsymbol{SO})=0,\ \ \pi_2(\boldsymbol{BSU})=\pi_1(\boldsymbol{SU})=0$$

残りの場合も，$\boldsymbol{U}/\boldsymbol{O}$, $\boldsymbol{O}/\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{U}/\boldsymbol{Sp}$, $\boldsymbol{SO}/\boldsymbol{U}$ の場合を決定すれば，他の $\boldsymbol{SU}/\boldsymbol{SO}$ 等は容易に求められ，低次元で若干異なるだけである.

定理 6.1 (1) $\boldsymbol{r}:\tilde{K}(S^n)\to\widetilde{KO}(S^n)$, $n>0$, は
$n\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 8)$ のとき $2(\widetilde{KO}(S^n))$ の上への同型,
$n\equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 8)$ のとき全射,
$n\equiv 4\ (\mathrm{mod}\ 8)$ のとき同型.
(2) $\boldsymbol{q}:\tilde{K}(S^n)\to\widetilde{KSp}(S^n)$, $n>0$, は
$n\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 8)$ のとき同型,
$n\equiv 4\ (\mathrm{mod}\ 8)$ のとき $2(\widetilde{KSp}(S^n))$ の上への同型,
$n\equiv 6\ (\mathrm{mod}\ 8)$ のとき全射.
(3) $\boldsymbol{t}=(-1)^n:\tilde{K}(S^{2n})\longrightarrow\tilde{K}(S^{2n})$, $n>0$

［証明］ (1)は定理 5.12 の証明の中に含まれている. (2)も同様に補題 5.15 よりえられる. (4.6) (1)の $\boldsymbol{cr}=1+\boldsymbol{t}=\boldsymbol{c}'\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{rc}=\boldsymbol{qc}'=2$ より(3)をうる. (終)

定理 6.2 $n>0$ に対する無限次元対称空間 M の n 次元ホモトピー群 $\pi_n(M)$ は 8 を法とする各 n の値に対して下表の通りである.

M:	$\boldsymbol{U}$	$\boldsymbol{BU}$	$\boldsymbol{O}$	$\boldsymbol{BO}$	$\boldsymbol{Sp}$	$\boldsymbol{BSp}$	$\boldsymbol{O/U}$	$\boldsymbol{Sp/U}$	$\boldsymbol{U/SO}$	$\boldsymbol{U/Sp}$
$n\equiv 0$	0	$\boldsymbol{Z}$	$\boldsymbol{Z}_2$	$\boldsymbol{Z}$	0	$\boldsymbol{Z}$	$\boldsymbol{Z}_2$	0	0	0
$n\equiv 1$	$\boldsymbol{Z}$	0	$\boldsymbol{Z}_2$	$\boldsymbol{Z}_2$	0	0	0	0	$\boldsymbol{Z}$	$\boldsymbol{Z}$
$n\equiv 2$	0	$\boldsymbol{Z}$	0	$\boldsymbol{Z}_2$	0	0	$\boldsymbol{Z}$	$\boldsymbol{Z}$	$\boldsymbol{Z}_2$	0
$n\equiv 3$	$\boldsymbol{Z}$	0	$\boldsymbol{Z}$	0	$\boldsymbol{Z}$	0	0	$\boldsymbol{Z}_2$	$\boldsymbol{Z}_2$	0
$n\equiv 4$	0	$\boldsymbol{Z}$	0	$\boldsymbol{Z}$	$\boldsymbol{Z}_2$	$\boldsymbol{Z}$	0	$\boldsymbol{Z}_2$	0	0
$n\equiv 5$	$\boldsymbol{Z}$	0	0	0	$\boldsymbol{Z}_2$	$\boldsymbol{Z}_2$	0	0	$\boldsymbol{Z}$	$\boldsymbol{Z}$
$n\equiv 6$	0	$\boldsymbol{Z}$	0	0	0	$\boldsymbol{Z}_2$	$\boldsymbol{Z}$	$\boldsymbol{Z}$	0	$\boldsymbol{Z}_2$
$n\equiv 7$	$\boldsymbol{Z}$	0	$\boldsymbol{Z}$	0	$\boldsymbol{Z}$	0	$\boldsymbol{Z}_2$	0	0	$\boldsymbol{Z}_2$

［証明］ 前半の 6 個の空間については, 系 5.7, 定理 5.12, 定理 5.16 ですでにわかっている. 定理 5.10$\Longrightarrow\pi_n(\boldsymbol{O/U})\cong\pi_n(\Omega\boldsymbol{SO})\cong\pi_{n+1}(\boldsymbol{SO})\cong\pi_{n+1}(\boldsymbol{O})$, $n\geq 0$. 定理 5.14$\Longrightarrow\pi_n(\boldsymbol{Sp/U})\cong\pi_n(\Omega\boldsymbol{Sp})\cong\pi_{n+1}(\boldsymbol{Sp})$. よって, $\boldsymbol{O/U}$, $\boldsymbol{Sp/U}$ に関する結果をうる.

補題 5.2 の写像 $\boldsymbol{j}_H$, $\Omega\boldsymbol{i}_{C'}$, $\boldsymbol{j}_R$, $\Omega\boldsymbol{i}_C$ のホモトピーファイバーはそれぞれ, $\boldsymbol{Sp}$, $\Omega^2(\boldsymbol{SU/Sp})$, $\boldsymbol{O}$, $\Omega^2(\boldsymbol{SU/SO})$ に弱ホモトピー同値であるから, 補題 5.2 の図式のホモトピー可換性からそのホモトピーファイバーの間の写像がえられる. これらの写像と $\boldsymbol{\beta}_{Sp}$, $\boldsymbol{\beta}$ および $\boldsymbol{\beta}_O$, $\boldsymbol{\beta}$ の誘導するファイバー空間のホモトピー完全系列の間の写像に 5-補題を適用して次がえられる：

(6.2)′　(弱)ホモトピー同値 $\boldsymbol{Sp}\to\Omega^2(\boldsymbol{SU}/\boldsymbol{Sp})$, $\boldsymbol{O}\to\Omega^2(\boldsymbol{SU}/\boldsymbol{SO})$ がある.

$\boldsymbol{U}/\boldsymbol{Sp}$, $\boldsymbol{U}/\boldsymbol{O}$ に関する結果は(6.2)′より容易に導かれる.　(終)

定理6.2から予想されるように, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\beta}_O$, $\boldsymbol{\beta}_{Sp}$, $\boldsymbol{\sigma}_G:\boldsymbol{G}\to\Omega\boldsymbol{BG}$ の外に次の4つのホモトピー同値がある：

$$\boldsymbol{\beta}_{O/U}:\boldsymbol{U}/\boldsymbol{Sp}\longrightarrow\Omega(\boldsymbol{SO}/\boldsymbol{U}),\quad \boldsymbol{\beta}_{U/O}:\boldsymbol{BO}\longrightarrow\Omega(\boldsymbol{SU}/\boldsymbol{SO})$$

$$\boldsymbol{\beta}_{Sp/U}:\boldsymbol{U}/\boldsymbol{SO}\longrightarrow\Omega(\boldsymbol{Sp}/\boldsymbol{U}),\quad \boldsymbol{\beta}_{U/Sp}:\boldsymbol{BSp}\longrightarrow\Omega(\boldsymbol{SU}/\boldsymbol{Sp})$$

これらは次の Bott の写像から誘導される：

$$\beta_{O/U}(n):U(2n)/Sp(n)\longrightarrow\Omega(SO(4n)/U(2n))$$
$$\Longleftrightarrow\beta_{O/U}(n)\{A\}(t)\equiv A\,T_t(n)A^{-1}\,T_t(n)^{-1}$$
$$\beta_{U/O}(n):O(2n)/O(n)\times O(n)\longrightarrow\Omega(SU(2n)/SO(2n))$$
$$\Longleftrightarrow\beta_{U/O}(n)\{A\}(t)\equiv AR_t(n)A^{-1}R_t(n)^{-1}$$
$$\beta_{Sp/U}(n):U(n)/SO(n)\longrightarrow\Omega(Sp(n)/U(n))$$
$$\Longleftrightarrow\beta_{Sp/U}(n)\{A\}(t)\equiv A(e^{\pi jt/2}I_n)A^{-1}(e^{-\pi tj/2}I_n)$$
$$\beta_{U/Sp}(n):Sp(2n)/Sp(n)\times Sp(n)\longrightarrow\Omega(SU(4n)/Sp(2n))$$
$$\Longleftrightarrow\beta_{U/Sp}(n)\{A\}(t)\equiv AR_t^2(n)A^{-1}R_t^2(n)^{-1}$$

ただし, $T_t(n)=S_{t/2}(n)\oplus S_{-t/2}(n)$, $R_t^2(n)=R_t(n)\oplus R_t(n)$ とする.

定理 6.3　$\boldsymbol{\beta}_{O/U}$, $\boldsymbol{\beta}_{U/O}$, $\boldsymbol{\beta}_{Sp/U}$, $\boldsymbol{\beta}_{U/Sp}$ は(弱)ホモトピー同値である.

Bott の証明法は Morse 理論(第6章)による. ホモロジー群, コホモロジー群を用いた証明は Dyer-Lashof[26] によって与えられた. また, これらの結果から, *KF*-群の周期性を示すために Clifford 代数を使う方法がある[28].

Hopf の(ファイバー)写像

定義　加群 $\boldsymbol{H}^2$ の元 $x=(p_1, p_2)$, $y=(q_1, q_2)$ の積を $xy=(p_1q_1-p_2\bar{q}_2,\ p_1q_2+\bar{q}_1p_2)$ で定義してえられる多元環を **Cayley 数(体)** といい $\mathfrak{C}$ で表わす.

$\mathfrak{C}$ の積は結合性をみたさないが, 次の性質は直接計算で確かめられる：

(6.4)　$x=(p_1, p_2)$ に対して, $\bar{x}=(\bar{p}_1, -p_2)$, $|x|=\sqrt{|p_1|^2+|p_2|^2}$ とおけば

(1)　$x\bar{x}=\bar{x}x=|x|^2$, 即ち, $x\neq 0\Longrightarrow x^{-1}=\bar{x}/|x|$,

(2)　$|xy|=|x|\cdot|y|$.

定理 6.5　(1)　$n=2, 4, 8$ のとき, 主バンドル $(SO(n), p, S^{n-1}, SO(n-1))$ は切断をもつ.

(2)　主バンドル $(SO(n),\ p,\ S^{n-1},\ SO(n-1))$ が切断をもてば，$S^{n-1}\times SO(n-1)\cong SO(n)$ (同相)，ファイバーバンドル $S^{n-1}\xrightarrow{i}S^{2n-1}\xrightarrow{h}S^n$ が存在して，$(\alpha,\ \beta)\to S\alpha+h_*\beta$ は同型 $\pi_i(S^{n-1})\oplus\pi_{i+1}(S^{2n-1})\cong\pi_{i+1}(S^n)$ を与える．

［証明］　(1) $n=2,\ 4,\ 8$ に応じて $\boldsymbol{R}^n=\boldsymbol{C},\ \boldsymbol{H},\ \mathfrak{C}$ と考えるとき，その積を用いて $s(x)(y)=xy$ とおく．$x\in S^{n-1}=\{x\in\boldsymbol{R}^n\,|\,|x|=1\}$ のときは，$|s(x)y|=|y|$ であるから，$s(x):\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}^n$ は直交変換．S^{n-1} は連結であるから，$s:S^{n-1}\to SO(n)$ が定義された．$y=\boldsymbol{e}_1$ は積の単位元であるから，$p:SO(n)\to S^{n-1}\Longleftrightarrow p(r)=r(\boldsymbol{e}_1)$ に関して s は切断である．

(2)　切断 $s:S^{n-1}\to SO(n)$ に対して，

$h_+:D^n\times S^{n-1}\to E_+{}^n$ (上半球) $\Longleftrightarrow h_+(tx,\ y)=(\sqrt{1-t^2}\,s(x)(y),\ t)$

$h_-:S^{n-1}\times D^n\to E_-{}^n$ (下半球) $\Longleftrightarrow h_-(x,\ ty)=(\sqrt{1-t^2}\,s(x)(y),\ -t)$

と定義する $(t\in I;\ x,\ y\in S^{n-1})$．$D^n\times S^{n-1}\cup S^{n-1}\times D^n=\partial(D^n\times D^n)$ は S^{2n-1} と同相であるから，$h_t,\ h_-$ は $h:S^{2n-1}\to S^n$ を定義する．$(S^{2n-1},\ h,\ S^n)$ が S^{n-1} をファイバー，$SO(n)$ を構造群とするファイバーバンドルであることは容易に確かめられる．このファイバーバンドルのホモトピー完全系列の $\Delta:\pi_{i+1}(S^n)\to\pi_i(S^{n-1})$ について $\Delta\circ S=\pm\mathrm{id}$ を確かめて定理の同型がえられる．　(終)

定義　定理 6.5(1) の証明で定義した切断から (2) によって構成される $h:S^{2n-1}\to S^n$ $(n=2,\ 4,\ 8)$ を **Hopf のファイバー写像**という．

定理 6.6　$n\neq 2,\ 4,\ 8$ のとき，主バンドル $(SO(n),\ p,\ S^{n-1},\ SO(n-1))$ は切断をもたず，$p_*:\pi_{n-1}(SO(n))\to\pi_{n-1}(S^{n-1})$ は全射ではない．

［証明］　戸田-三村 [14] より次のことを引用する．$n\neq 2,\ 4,\ 8$ のとき Hopf 不変量 $H:\pi_{2n-1}(S^n)\to\boldsymbol{Z}$ は全射でなく (同書第 7 章，定理 7.1，定理 7.2)，従って $S:\pi_{2n-3}(S^{n-1})\to\pi_{2n-2}(S^n)$ は単射ではない (同書第 2 章，系 2.5)．定理 6.5(2) により前半がえられる．p_* が全射であれば，$f:S^{n-1}\to SO(n)$ で $p\circ f\simeq 1:S^{n-1}\to S^{n-1}$ となるものがある．被覆ホモトピー性質から，$f\simeq s$ かつ $p\circ s=1$ となるもの，即ち，切断 s がえられる．よって，$n\neq 2,\ 4,\ 8$ ならば p_* は全射ではない．　(終)

ここで，若干の球面のホモトピー群を求めてみよう．系 1.4 より，

(6.7)　懸垂準同型 $S:\pi_k(S^n)\to\pi_{k+1}(S^{n+1})$ は $k\leq 2n-1$ のとき全射，$k<2n-1$

のとき同型である.

定理 6.5 (2) より,

(6.7)′　$n=1,\ 3,\ 7 \Longrightarrow S:\pi_k(S^n)\to\pi_{k+1}(S^{n+1})$ は単射, 特に,

$$S:\pi_{2n-1}(S^n)\cong\pi_{2n}(S^{n+1}).$$

被覆空間 $(\boldsymbol{R},\ p,\ S^1)$ において, $\boldsymbol{R}$ は可縮であるから,

$$\pi_k(S^1)=0\ (k>1),\qquad \pi_1(S^1)\cong\boldsymbol{Z}$$

従って, 定理 6.5 (2) より

(6.8)　$k\geq 3 \Longrightarrow h_*:\pi_k(S^3)\cong\pi_k(S^2)$

$S^3\cong Sp(1)$ である. 第2章, 系 3.17 により,

$$k<6\Longrightarrow\pi_k(S^3)\cong\pi_k(Sp(1))\cong\pi_k(\boldsymbol{Sp})$$

これは定理 6.2 でわかっているから, 上の諸結果を総合して次の結果がえられる:

(6.9)　(1)　$k<n\Longrightarrow\pi_k(S^n)=0$

(2)　$n\geq 1\Longrightarrow\pi_n(S^n)\cong\boldsymbol{Z}$

(3)　$\pi_2(S^1)=0$;　$\pi_3(S^2)\cong\boldsymbol{Z}$;　$n\geq 3\Longrightarrow\pi_{n+1}(S^n)\cong\boldsymbol{Z}_2$

(4)　$\pi_3(S^1)=0$;　$n\geq 2\Longrightarrow\pi_{n+2}(S^n)\cong\boldsymbol{Z}_2$

ここで, 次のことに注意する:

(6.9)′　(1)　$\pi_n(S^n)$ の生成元は恒等写像の類 $\iota_n=[1_{S^n}]$.

(2)　$\pi_3(S^2)$ の生成元は Hopf の ファイバー写像 $h:S^3\to S^2$ の類 $\eta_2=[h]$,

$\pi_{n+1}(S^n)$ の生成元は $\eta_n=S^{n-2}\eta_2$　$(n\geq 2)$.

(3)　$\pi_{n+2}(S^n)$ の生成元は $\eta_n{}^2=\eta_n\circ\eta_{n+1}$　$(n\geq 2)$.

定理 6.10　(**Serre**)　(1)　n が奇数 $\Longrightarrow\pi_k(S^n)$ は $k\neq n$ のとき有限である.

(2)　n が偶数 $\Longrightarrow\pi_k(S^n)$ は $k\neq n,\ 2n-1$ のとき有限, $k=2n-1$ のときは無限巡回群と有限群の直和である.

［証明］　まず, Eilenberg-MacLane 空間 $K(\boldsymbol{Z},\ n)$ を K_n と書くと,

$$(6.10)'\quad H^*(K_n;\ \boldsymbol{Q})=\begin{cases}\wedge(u_n) & (n:\text{奇数})\\ \boldsymbol{Q}[u_n] & (n:\text{偶数})\end{cases}$$

が $n\geq 1$ に関する帰納法で, $S^1=K(\boldsymbol{Z},\ 1)$ と ファイバー空間 $K_n=\Omega K_{n+1}\to PK_{n+1}\to K_{n+1}$ のスペクトル系列の計算でわかる. Serre の $\mathscr{C}$-理論により, $H_*(S^n)$ は有限生成 $\Longrightarrow\pi_*(S^n)$ は有限生成. $\pi_n(K_n)\cong\boldsymbol{Z}$ の生成元が射入 $S^n\hookrightarrow K_n$ で

表わされるとすると，n が奇数のとき，$H_*(K_n,\ S^n;\ \boldsymbol{Q})=0 \Longrightarrow \pi_*(K_n,\ S^n)$ は有限 $\Longrightarrow$ (1)．n が偶数のときは，ファイバー空間 $\Omega(K_n,\ S^n)\to P(K_n,\ S^n)\to K_n$ のスペクトル系列を使って，$H^*(\Omega(K_n,\ S^n);\ \boldsymbol{Q})=\Lambda(u_{2n-1})$．従って，有限群のクラス $\mathscr{F}$ について，$\pi_*(\Omega(K_n,\ S^n))$ と $\pi_*(S^{2n-1})$ は $\mathscr{F}$-同型である．これと(1)を組合わせて(2)がえられる．　(終)

古典群の準安定ホモトピー群

$G=U,\ SU,\ Sp,\ SO$ について，古典群 $G(n)$ のホモトピー群を考える．

$$k>1 \Longrightarrow \pi_k(SU(n))\cong\pi_k(U(n))$$

であるから，$SU(n)$ と $U(n)$ はそのいずれか一方を調べれば十分である．

$d=1(G=SO)$，$d=2(G=SU,\ U)$，$d=4(G=Sp)$ について，第2章，系3.17より次の同型がえられる．

(6.11)　$k<d(n+1)-2 \Longrightarrow i_*:\pi_k(G(n))\cong\pi_k(\boldsymbol{G})$

このような k の範囲 $<d(n+1)-2$ にある $\pi_k(G(n))$ は**安定**である，または**安定ホモトピー群**とよばれる．

Nを k に対して十分大にとれば，$\pi_k(G(N))\cong\pi_k(\boldsymbol{G})$ であるから，ホモトピー完全系列

(6.12)

$$\cdots\longrightarrow\pi_{k+1}(G(N)/G(n))\xrightarrow{\Delta}\pi_k(G(n))\xrightarrow{i_*}\pi_k(\boldsymbol{G})\xrightarrow{p_*}\pi_k(G(N)/G(n))\longrightarrow\cdots$$

がえられる．ここで，$G(N)/G(n)$ は $(d(n+1)-2)$-連結であるから，系1.14によって，次の同型がえられる：

(6.12)′　$k+1\leq 2d(n+1)-4$

$$\Longrightarrow S^M:\pi_{k+1}(G(N)/G(n))\cong\pi_{k+M+1}(S^M(G(N)/G(n)))$$

即ち，$\pi_{k+1}(G(N)/G(n))$ は懸垂の意味で安定なホモトピー群であり，ホモトピー論の各種の方法が使い易い場合である．このような範囲，$k<2d(n+1)-6$，にある $\pi_k(G(n))$ は**準安定ホモトピー群**といわれる．

射影 $p:G(n+1)\longrightarrow G(n+1)/G(n)=S^{d(n+1)-1}$ で誘導される準同型

$$p_*:\pi_{d(n+1)-1}(G(n+1))\longrightarrow\pi_{d(n+1)-1}(S^{d(n+1)-1})\cong\boldsymbol{Z}$$

の像を定めよう．

定理 6.13

(1)　$p_*\pi_{2n}(SO(2n+1))=0,\ \ p_*\pi_{2n-1}(SO(2n))=\begin{cases}\pi_{2n-1}(S^{2n-1}) & (n=1,\ 3,\ 7)\\ 2\pi_{2n-1}(S^{2n-1}) & (n\neq 1,\ 3,\ 7)\end{cases}$

(2)　$p_*\pi_{2n+1}(U(n+1))=p_*\pi_{2n+1}(SU(n+1))=n!\ \pi_{2n+1}(S^{2n+1})$

(3)　$p_*\pi_{4n+3}(Sp(n+1))=\begin{cases}(2n+1)!\ \pi_{4n+3}(S^{4n+3}) & (n：偶数)\\ 2(2n+1)!\ \pi_{4n+3}(S^{4n+3}) & (n：奇数)\end{cases}$

［証明］　(1)　ファイバーバンドル　$S^{2n-1}\to SO(2n+1)/SO(2n-1)\to S^{2n}$ に関するホモトピー完全系列

$$\pi_{2n}(S^{2n})\xrightarrow{\Delta}\pi_{2n-1}(S^{2n-1})\xrightarrow{i_*}\pi_{2n-1}(SO(2n+1)/SO(2n-1))\longrightarrow\pi_{2n-1}(S^{2n})=0$$

を考える．第3章，系3.13より，$H_{2n-1}(SO(2n+1)/SO(2n-1))\cong \boldsymbol{Z}_2$．従って，定理1.3により，$\pi_{2n-1}(SO(2n+1)/SO(2n-1))\cong\boldsymbol{Z}_2$．　故に，$\mathrm{Im}\,\Delta=2\pi_{2n-1}(S^{2n-1})$．$\Delta$ は $\pi_{2n}(S^{2n})\xrightarrow{\Delta'}\pi_{2n-1}(SO(2n))\xrightarrow{p_*}\pi_{2n-1}(S^{2n-1})$ と分解できるから，$\mathrm{Im}\,p_*\supset\mathrm{Im}\,\Delta=2\pi_{2n-1}(S^{2n-1})$．故に(1)の後半は定理6.5，定理6.6より導かれる．

系列 $\pi_{2n}(SO(2n+1))\xrightarrow{p_*}\pi_{2n}(S^{2n})\xrightarrow{\Delta'}\pi_{2n-1}(SO(2n))$ は完全で Δ' は単射であるから，$p_*\pi_{2n}(SO(2n+1))=0$.

(2)　(6.11)より，$\pi_{2n+1}(U(n+1))\cong\pi_{2n+1}(\boldsymbol{U})$．従って，$\pi_{2n+2}(BU(n+1))\cong\pi_{2n+2}(\boldsymbol{BU})$．補題5.8(3)によって，$\pi_{2n+2}(BU(n+1))$ の生成元を表わす $g：S^{2n+2}\to BU(n+1)$ について，$g^*(c_{n+1})=\pm n!\ u_{2n+2}$．$g$ の随伴写像 $f：S^{2n+1}\to U(n+1)$ について考えれば，容易に $f^*(\sigma(c_{n+1}))=\pm n!\,u_{2n+1}$．一方，$p：U(n+1)\to S^{2n+1}$ について，$p^*(u_{2n+1})=\sigma(c_{n+1})+$(分解される元)であるから，$(p\circ f)^*(u_{2n+1})=\pm n!\ u_{2n+1}$．同様なことはホモロジー群，従って Hurewicz の同型によってホモトピー群でもいえて，$(p\circ f)_*\iota_{2n+1}=\iota_{2n+1}\in\pi_{2n+1}(S^{2n+1})$ となる．［f］は $\pi_{2n+1}(U(n+1))$ の生成元であるから，これは(2)を示している．

(3)　右の可換な図式より，$\boldsymbol{c}'_*：\pi_{4n+3}(Sp(n+1))\to\pi_{4n+3}(SU(2n+2))$ の状態を調べればよい．(6.10)を使えばこれは $\boldsymbol{c}'_*：\pi_{4n+3}(\boldsymbol{Sp})\to\pi_{4n+3}(\boldsymbol{U})$，従って，

$$\begin{array}{ccc} Sp(n+1) & \xrightarrow{c'} & SU(2n+2)\\ \downarrow p & & \downarrow p\\ Sp(n+1)/Sp(n) & \cong & SU(2n+2)/SU(2n+1)\end{array}$$

$$\boldsymbol{c}'：\widetilde{KSp}(S^{4n+4})=\pi_{4n+4}(\boldsymbol{BSp})\to\tilde{K}(S^{4n+4})\cong\pi_{4n+4}(\boldsymbol{BU})$$

と同値である．定理5.16により $\boldsymbol{c}'$ は $n+1$ が奇数のとき同型，$n+1$ が偶数の

とき $2\tilde{K}(S^{4n})$ の上への 同型である．これより(3)をうる．　(終)

系 6.14　(1)　$n \neq 1, 2, 3, 7$ とする．

$\pi_{n-1}(SO(n)) \cong \boldsymbol{Z} \oplus \boldsymbol{Z}$ $(n \equiv 0, 4 (\mathrm{mod}\ 8))$，$\pi_{n-1}(SO(n)) \cong \boldsymbol{Z} \oplus \boldsymbol{Z}_2$　$(n \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 8))$

$\pi_{n-1}(SO(n)) \cong \boldsymbol{Z}$　$(n \equiv 6 (\mathrm{mod}\ 8))$，　$\pi_{n-1}(SO(n)) \cong \boldsymbol{Z}_2 \oplus \boldsymbol{Z}_2$ $(n \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 8))$

$\pi_{n-1}(SO(n)) \cong \boldsymbol{Z}_2$　$(n \equiv 3, 5, 7 (\mathrm{mod}\ 8))$

なお，$\pi_2(SO(3)) = \pi_6(SO(7)) = 0$

(2)　$\pi_{2n}(U(n)) \cong \boldsymbol{Z}_{n!}$

(3)　$\pi_{4n-2}(Sp(n)) \cong \boldsymbol{Z}_{2(2n+1)!}$　$(n$：奇数)

　　$\pi_{4n-2}(Sp(n)) \cong \boldsymbol{Z}_{(2n+1)!}$　$(n$：偶数)

［証明］ 定理 6.13，定理 6.2 を (6.12) よりえられる完全系列

$$\pi_{d(n+1)-1}(G(n+1)) \xrightarrow{p_*} \pi_{d(n+1)-1}(S^{d(n+1)-1}) \xrightarrow{\Delta} \pi_{d(n+1)-2}(G(n))$$
$$\xrightarrow{i_*} \pi_{d(n+1)-2}(\boldsymbol{G}) \to 0$$

に適用してえられる．ただし，$\pi_{n-1}(SO(n))$ において $n \equiv 1, 2 (\mathrm{mod}\ 8)$ のときには群拡大の問題がおこる．これを定めるには次を示せばよい．

(6.15)　$\wedge\eta : \widetilde{KO}(S^n) \to \widetilde{KO}(S^{n+1})$ は $\pi_{n+1}(S^n)$ の生成元 η_n の合成 $\eta_n{}^* : [S^n, \boldsymbol{BO}] \to [S^{n+1}, \boldsymbol{BO}]$ によって与えられる．ただし，$n \geq 2$．(証明略)

これを使えば，$\pi_{n-1}(SO(n)), n \equiv 1, 2 (\mathrm{mod}\ 8)$，の位数 2 の元で i_* で $\pi_{n-1}(\boldsymbol{SO})$ の生成元となるものがえられる．従って，問題の群拡大は自明となる．(終)

注意 6.16　この計算をさらに進めるには，ホモトピー論の各種の知識が必要であるので，本書では説明する予裕はない．次の例を挙げておこう．

$$\pi_{2n+1}(U(n)) \cong \boldsymbol{Z}_2\ (n：\text{偶数}) \qquad = 0\ (n：\text{奇数})$$
$$\pi_{2n+2}(U(n)) \cong \boldsymbol{Z}_{(n+1)!} \oplus \boldsymbol{Z}_2\ (n：\text{偶数}) \cong \boldsymbol{Z}_{(n+1)!/2}\ (n：\text{奇数})$$
$$\pi_{2n+3}(U(n)) \cong \boldsymbol{Z}_{d(n)}\ (n：\text{偶数}) \qquad \cong \boldsymbol{Z}_{d(n)/2}\ (n：\text{奇数})$$

ただし，$n \geq 3$，$d(n) = (n(3n+1), 24)$：最大公約数とする．

第 2 章，§5 で，Spin(n)，$n = 3, 4, 5, 6$ は古典群と 同型であることが示された．これに，被覆写像による同型 $\pi_k(\mathrm{Spin}(n)) \cong \pi_k(SO(n))$，$k > 1$，を使えば次の同型がえられる：

(6.17)　$k > 1$ とする．

$\pi_k(Sp(1)) \cong \pi_k(SU(2)) \cong \pi_k(SO(3))$

$\pi_k(Sp(1)\times Sp(1))\cong\pi_k(SO(4))$

$\pi_k(Sp(2))\cong\pi_k(SO(5))$

$\pi_k(SU(4))\cong\pi_k(SO(6))$

これらの同型や，$\pi_k(SU(n))\cong\pi_k(U(n))$　$(k>1)$，$\pi_k(SO(n))\cong\pi_k(O(n))$　$(k>0)$ を除いて，古典群の8次までのホモトピー群は下の表のようになる．ただし，つねに $\pi_2(G)=0$ であるから省略する．また次の注意を使う．

注意 6.18　Cayley 数を使って，Spin(7) の Spin(9) への適当な部分群としての射入が作られて，$\mathrm{Spin}(9)/\mathrm{Spin}(7)\cong S^{15}$．（横田一郎[8]参照）

	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$
$\pi_k(Sp(1))$	$\boldsymbol{Z}$	$\boldsymbol{Z}_2$	$\boldsymbol{Z}_2$	$\boldsymbol{Z}_{12}$	$\boldsymbol{Z}_2$	$\boldsymbol{Z}_2$
$\pi_k(Sp(n)),\ n\geq 2$	$\boldsymbol{Z}$	$\boldsymbol{Z}_2$	$\boldsymbol{Z}_2$	0	$\boldsymbol{Z}$	0
$\pi_k(U(3))$	$\boldsymbol{Z}$	0	$\boldsymbol{Z}$	$\boldsymbol{Z}_6$	0	$\boldsymbol{Z}_{12}$
$\pi_k(U(4))$	$\boldsymbol{Z}$	0	$\boldsymbol{Z}$	0	$\boldsymbol{Z}$	$\boldsymbol{Z}_{24}$
$\pi_k(U(n)),\ n\geq 5$	$\boldsymbol{Z}$	0	$\boldsymbol{Z}$	0	$\boldsymbol{Z}$	0
$\pi_k(O(7))$	$\boldsymbol{Z}$	0	0	0	$\boldsymbol{Z}$	$\boldsymbol{Z}_2\oplus\boldsymbol{Z}_2$
$\pi_k(O(8))$	$\boldsymbol{Z}$	0	0	0	$\boldsymbol{Z}\oplus\boldsymbol{Z}$	$\boldsymbol{Z}_2\oplus\boldsymbol{Z}_2\oplus\boldsymbol{Z}_2$
$\pi_k(O(9))$	$\boldsymbol{Z}$	0	0	0	$\boldsymbol{Z}$	$\boldsymbol{Z}_2\oplus\boldsymbol{Z}_2$
$\pi_k(O(n)),\ n\geq 10$	$\boldsymbol{Z}$	0	0	0	$\boldsymbol{Z}$	$\boldsymbol{Z}_2$

古典群の等質空間による mod *p* 分解

定義　p は素数または0とする．

写像 $f:X\to Y$ は **p-同値**$\Longleftrightarrow f$ は各弧状成分の全単射を与え，各成分上で $f_*:\pi_*(X_\alpha)\to\pi_*(Y_\alpha)$ は $\mathscr{C}_p$-同型（ただし，$\mathscr{C}_0=\mathscr{F}$）．

記号　このとき $f:X\simeq_p Y$ と表わす．

定理 1.12 によれば，

(6.19)　X，Y が1-連結有限型とするとき，

$$f:X\simeq_p Y\Longleftrightarrow f_*:H_*(X;\ \boldsymbol{Z}_p)\cong H_*(Y;\ \boldsymbol{Z}_p)$$

$$\Longleftrightarrow f^*:H^*(Y;\ \boldsymbol{Z}_p)\cong H^*(X;\ \boldsymbol{Z}_p)\qquad (\text{ただし } \boldsymbol{Z}_0=\boldsymbol{Q})$$

定義　ファイバー空間 $(E,\ \pi,\ B)$ の **mod *p* 切断** $s:B\to E$

$\Longleftrightarrow\pi\circ s:B\to B$ は p-同値である．

(6.20) 主ファイバー空間 (E, π, B, F) が mod p 切断をもつ$\Longrightarrow$$p$-同値 $f: B\times F\simeq_p E$ がある$\Longrightarrow$$\pi_i(E)$ と $\pi_i(B)\oplus\pi_i(F)$ は $\mathscr{C}_p$-同型.

F の E への作用 μ について, $f(b, y)=\mu(s(b), y)$ とおけばよい.

系 6.21 p：奇素数$\Longrightarrow$$SO(2n-1)\times S^{2n-1}\simeq_p SO(2n)$

［証明］ 定理 6.13(1)より, $s: S^{2n-1}\to SO(2n)$ で $p\circ s$ の写像度 2 のものがあり, これは mod p 切断である. よって, (6.20)より系をうる. (終)

補題 6.22 p を奇素数とする. $S^{4n-1}\simeq_p SO(2n+1)/SO(2n-1)$. $i_*: \pi_i(SO(2n+1))\to\pi_i(\boldsymbol{SO})$ および $i_*: \pi_i(SU(2n+1)/SO(2n+1))\to\pi_i(\boldsymbol{SU}/\boldsymbol{SO})$ は $i<4n+2$ のとき $\mathscr{C}_p$-同型, $i=4n+2$ のとき $\mathscr{C}_p$-全射.

［証明］ 2 重被覆 $S^3=Sp(1)\to SO(3)$ は p-同値であるから, $n>1$ とすると $V=SO(2n+1)/SO(2n-1)$ は 4-連結. $H_*(V;\ \boldsymbol{Z}_p)\cong H_*(S^{4n-1};\ \boldsymbol{Z}_p)$ であるから, 定理 1.11 により $\Xi[f]\not\equiv 0 \pmod p$ となる $f: S^{4n-1}\to V$ がある. この f は p-同値である. 後半は補題 3.11 の証明において, 同型等を $\mathscr{C}_p$-同型でおきかえることによってえられる. (終)

定理 6.23 (**Harris の分解**) p を奇素数とするとき, mod p 切断 $s_{2n+1}: SU(2n+1)/SO(2n+1)\to SU(2n+1)$ および $s'_{2n}: SU(2n)/Sp(n)\to SU(2n)$ があり, 従って

$$(SU(2n+1)/SO(2n+1))\times SO(2n+1)\simeq_p SU(2n+1)$$
$$(SU(2n)/Sp(n))\times Sp(n)\simeq_p SU(2n)$$

［証明］ $s_m: SU(m)/SO(m)\to SU(m)\Longleftrightarrow s_m\{A\}=A\bar{A}^{-1}$. $B\in SO(m)\Longrightarrow\bar{B}=B\Longrightarrow s_m\{AB\}=AB\bar{B}^{-1}\bar{A}^{-1}=A\bar{A}^{-1}=s_m\{A\}$ であるから s_m は定義され, $\boldsymbol{s}: \boldsymbol{SU}/\boldsymbol{SO}\to\boldsymbol{SU}$ に自然に拡張される. 射影との合成を $f=\boldsymbol{s}\circ\boldsymbol{\pi}: \boldsymbol{SU}\to\boldsymbol{SU}/\boldsymbol{SO}\to\boldsymbol{SU}$ とすれば, $f(A)=A\bar{A}^{-1}$ であるから, $f_*: \pi_{2j-1}(\boldsymbol{SU})\to\pi_{2j-1}(\boldsymbol{SU})$ に同値な $\tilde{K}(S^{2j})$ における対応は $1-\boldsymbol{t}: \tilde{K}(S^{2j})\to\tilde{K}(S^{2j})$ である. 定理 6.1(3)より, $f_*=1+(-1)^{j+1}$ は j が奇数のとき $\mathscr{C}_p$-同型. 一方, 定理 6.2 と $\boldsymbol{SO}\xrightarrow{i}\boldsymbol{SU}\xrightarrow{\boldsymbol{\pi}}\boldsymbol{SU}/\boldsymbol{SO}$ に関するホモトピー完全系列を考えれば, $\boldsymbol{\pi}_*: \pi_{4k+1}(\boldsymbol{SU})\to\pi_{4k+1}(\boldsymbol{SU}/\boldsymbol{SO})$ は $\mathscr{C}_p$-同型$\Longrightarrow$$(\boldsymbol{\pi}\circ\boldsymbol{s})_*=\boldsymbol{\pi}_*\circ\boldsymbol{s}_*: \pi_i(\boldsymbol{SU}/\boldsymbol{SO})\to\pi_i(\boldsymbol{SU}/\boldsymbol{SO})$ は $\mathscr{C}_p$-同型. $W_n=SU(2n+1)/SO(2n+1)$ とおくと, 補題 6.22 より $(p\circ s)_*: \pi_i(W_n)\to\pi_i(W_n)$ は $\mathscr{C}_p$-同型 $(i<4n+2)$$\Longrightarrow$$(p\circ s)^*: H^i(W_n;\ \boldsymbol{Z}_p)\to H^i(W_n;\ \boldsymbol{Z}_p)$ は単射 $(i<4n+2)$. ここで, $H^*(W_n;\ \boldsymbol{Z}_p)=\Lambda(e_5, e_9, \cdots, e_{4n+1})$(第 3 章, 定理 6.7(2) 参照)であるか

ら，$(p\circ s)^*: H^*(W_n; \boldsymbol{Z}_p)\cong H^*(W_n; \boldsymbol{Z}_p)\Longrightarrow p\circ s$ は p-同値 $(s=s_{2n+1})\Longrightarrow s_{2n+1}$ は mod p 切断.

第1章，(2.14)(2)を用いて，$s'_{2n}: SU(2n)/Sp(n)\to SU(2n)$ を $s'_{2n}\{A\}=AJ_n^{-1}\overline{A}^{-1}J_n$ によって定義できる．$(s'_{2n}\circ p')(A)=AJ_n^{-1}\overline{A}^{-1}J_n$．$J_n$ と I_n を $SU(2n)$ で結ぶ道を用いると，$s'_{2n}\circ p'\simeq s_{2n}\circ p: SU(2n)\to SU(2n)$ がえられる．あとは補題 6.22 の代わりに補題 3.11(3)を用いて上と同様.　(終)

定義　Lie 群 G は **p-正則**$\Longleftrightarrow$球面 S^{n_α} の直積からの p-同値 $f: \prod S^{n_\alpha}\simeq_p G$ がある.

(6.24)　G は p-正則$\Longrightarrow H^*(G; \boldsymbol{Z}_p)=\Lambda(x_{n_1}, \cdots, x_{n_l})$，$x_{n_i}\in H^{n_i}$，$\pi_*(G)$ と $\sum_i \pi_i(S^{n_i})$ は $\mathscr{C}_p$-同型.

定理 6.25　(**Serre**)　(1)　$U(n)$，$SU(n)$ は p-正則$\Longleftrightarrow n\leq p$.

(2)　$Sp(n)$ は p-正則$\Longleftrightarrow 2n\leq p$.

(3)　$O(n)$，$SO(n)$ は p-正則$\Longleftrightarrow n-1\leq p$.

［証明］　(1) 積は同相 $S^1\times SU(n)\cong U(n)$ $(S^1=U(1))$ を与えるから，$SU(n)$ について示す．$n\leq p$ ならば定理 6.13(2)より，$s: S^{2n-1}\to U(n)$ で $p\circ s$ の写像度$(n-1)!\not\equiv 0 \pmod p$ となるものがある．(6.20)より，$SU(n-1)\times S^{2n-1}\simeq_p SU(n)$．$n$ に関する帰納法により，$n\leq p\Longrightarrow SU(n)$ は p-正則.

逆に，$n>p$ のとき $SU(n)$ が p-正則であると仮定する．$H^*(SU(n))=\Lambda(e_3, e_5, \cdots, e_{2n-1})$ であるから，p-同値 $f: S^3\times S^5\times\cdots\times S^{2n-1}\to SU(n)$ がある．f_n を f の S^{2n-1} への制限にとれば，$f_n^*(e_{2n-1})\not\equiv 0 \pmod p$ でなければならない．$H^{2n-1}(S^{2n-1})$ の生成元 u_{2n-1} について，$e_{2n-1}=p^*u_{2n-1}$ にとれるから，$(p\circ f_n)^*(u_{2n-1})\not\equiv 0 \pmod p$．一方，定理 6.13(2)より $[p\circ f_n]\in p_*\pi_{2n-1}(SU(n))=(n-1)!\ \pi_{2n-1}(S^{2n-1})\Longrightarrow (p\circ f_n)^*(u_{2n-1})\equiv 0 \pmod{(n-1)!}$．$p$ は $(n-1)!$ の因数であるからこれは矛盾である．故に $SU(n)$ が p-正則$\Longrightarrow n\leq p$.

(2)は(1)と同様に定理 6.13(3)を使って証明される.

(3) 同相 $S^0\times SO(n)\cong O(n)$ があるから $SO(n)$ について示せばよい．また，系 6.14 によって，奇数の $n=2m+1$ について示せばよい．$m=1$ の場合は二重被覆 $p: Sp(1)=S^3\to SO(3)$ は p-同値 $(p>2)$．$n\geq 3$ のとき $\pi_1(SO(n))\cong \boldsymbol{Z}_2$ であるから，$SO(n)$ は 2-正則ではない．以上のことから，$n=2m+1\geq 5$，$p\geq 3$ として(3)を証明する．このとき定理 6.23 が使える.

$n-1=2m\leq p$ とするとき，$2m+1\leq p$ である．(1)の p-同値 $f: S^3\times S^5\times\cdots\times S^{4m+1}\to SU(2m+1)$ は，$f_i: S^{2i+1}\to SU(2m+1)$ で $[f_i]$ が $\pi_{2i+1}(SU(2m+1))\cong \boldsymbol{Z}$ の生成元の a_i 倍，$a_i\not\equiv 0 \pmod p$，となるものから，$SU(2m+1)$ の積を用いて作ることができる．ここで，定理6.23を考えると，奇数の $i=2j+1$ について，$f_{2j+1}(S^{4j+3})\subset SO(2m+1)$ にとれることがわかる．この f_{2j+1} と $SO(2m+1)$ の積を用いて $\bar{f}: Y\to SO(2m+1)$，ただし $Y=S^3\times\cdots\times S^{4m-1}$，を作る．また $Y'=S^5\times S^9\times\cdots\times S^{4m+1}$ に対して，$g': Y'\to SU(2m+1)$ を f_{2j} を用いて作り，$\bar{g}=p\circ g': Y'\to SU(2m+1)/SO(2m+1)$ とおく．定理6.23の p-同値 $h(=s_{2n+1}\circ \boldsymbol{c}): (SU(2m+1)/SO(2m+1))\times SO(2m+1)\to SU(2m+1)$ について，$h\circ(\bar{f}\times\bar{g}): Y\times Y'\to SU(2m+1)$ は p-同値となる．従って，$\bar{f}$ は p-同値 $\Longrightarrow SO(2m+1)$ は正則．

$n-1=2m>p$ のとき，$SO(2m+1)$ が p-正則であると仮定すると，p-同値 $g: S^3\times\cdots\times S^{4m-1}\to SO(2m+1)$ がある．$H^*(SO(2m+1); \boldsymbol{Z}_p)=\Lambda(e_3, \cdots, e_{4m-1})$，$e_{4m-1}=\sigma(p_m)$，$H^*(SU(2m+1); \boldsymbol{Z}_p)=\Lambda(e_3, \cdots, e_{4m+1})$，$e_{2j-1}=\sigma(c_j)$，において，$p_m=(-1)^m\rho_c{}^*(c_{2m})$ であるから，$\boldsymbol{c}^*(e_{4m-1})=(-1)^m e_{4m-1}$．$f_{2m}=\boldsymbol{c}\circ(g|S^{4m-1}): S^{4m-1}\to SO(2m+1)\subset SU(2m+1)$ とおけば，$f_{2m}{}^*(e_{4m-1})\not\equiv 0 \pmod p$ となるから，(1)の後半の証明のように矛盾に導かれる． (終)

コンパクト Lie 群の mod 0 分解

次の定理は H. Hopf の定理の古典的な型であり，H-空間や Hopf 代数の起源となったものである．

定理 6.26 **(Hopf)** $\boldsymbol{k}$ を標数0の体とする．コンパクト連結 Lie 群 G に対して，奇数次数の元 $x_{2n_i+1}\in H^{2n_i+1}(G; \boldsymbol{k})$ $(i=1, \cdots, l)$ が存在して，

$$H^*(G; \boldsymbol{k})=\Lambda(x_{2n_1+1}, \cdots, x_{2n_l+1})$$

この結果は，G が弧状連結な H-空間で，$\dim_{\boldsymbol{k}} H^*(G; \boldsymbol{k})<\infty$ となるときでも成り立つ．更に，$H^*(G; \boldsymbol{k})$ を $\boldsymbol{k}$ 上の連結かつ可換な $\boldsymbol{k}$ 上有限次元 Hopf 代数 A^* におきかえて一般化することができる．

［証明］ A^* について示せば十分である．A^* の乗法的な最小数の生成元 $\{a_i\}$，$a_i\in A^{m_i}$ $(i=1, 2, \cdots)$，を次数の小さいものから順次に選ぶ．まず，a_i の次数 m_i が奇数であることを示す．m_k は偶数であると仮定して矛盾を出す．商

環 $B^*=A^*/(a_i, i\neq k)$ は a_k で生成されるが，$\dim_k A^*<\infty$ であるから，$a_k{}^{t-1}\neq 0$，$a_k{}^t=0$ となる $t>1$ がある．$\pi: A^*\to B^*$ を射影として，環の準同型

$$\phi'=(\pi\otimes 1)\circ\phi : A^*\longrightarrow A^*\otimes A^*\longrightarrow B^*\otimes A^*$$

を考える．$\phi'(a_k)=(\pi\otimes 1)(a_k\otimes 1+\cdots+1\otimes a_k)$ であるから，

$$0=\phi'(a_k{}^t)=(\phi'(a_k))^t=(a_k\otimes 1+1\otimes a_k)^t=\sum_{0<j<t}\binom{t}{j}a_k{}^j\otimes a_k{}^{t-j}$$

右辺は0ではないから矛盾である．故に，各生成元の次数 m_i は奇数である．従って，$a_i{}^2=-a_i{}^2\Longrightarrow a_i{}^2=0$.

明らかに，生成元の個数は有限(l 個とする)であるから，自然な準同型

$$\Lambda(a_1, \cdots, a_l)\longrightarrow A^*$$

は全射である．$\Lambda(a_1, \cdots, a_{k-1})\to A^*$ が単射のとき，$\Lambda(a_1, \cdots, a_k)\to A^*$ も単射であることを示そう．a_k に対して，上の ϕ' を考える．a_i $(i<k)$ については $\phi'(a_i)=1\otimes a_i$ であるから，$y\in\Lambda(a_1, \cdots, a_{k-1})\Longrightarrow\phi'(y)=1\otimes y$.

$x\in\Lambda(a_1, \cdots, a_k)$ が A^* で消えたと仮定して，$x=0$ をいえばよい．$x=a_ky+y'$ $(y, y'\in\Lambda(a_1, \cdots, a_{k-1}))$ と表わせるから，$B^*\otimes A^*$ において，

$$\begin{aligned}0=\phi'(x)=\phi'(a_ky+y')&=(a_k\otimes 1+1\otimes a_k)(1\otimes y)+1\otimes y'\\&=a_k\otimes y+1\otimes x=a_k\otimes y\end{aligned}$$

$\Lambda(a_k)\otimes\Lambda(a_1, \cdots, a_{k-1})\to B^*\otimes A^*$ は単射であるから，$y=0\Longrightarrow y'=x=0$. 故に k に関する帰納法により $\Lambda(a_1, \cdots, a_l)\cong A^*$ が証明された．　(終)

定義　上の定理における奇数次数を大きさの順序に並べたもの $(2n_1+1, \cdots, 2n_l+1)$ を G の**型** (type) という．また，生成元の数を G の**階数**といい，

$$l=\operatorname{rank} G$$

で表わす．

定理 6.27　G を1-連結 Lie 群とし，その型を $(2n_1+1, \cdots, 2n_l+1)$ とするとき，0-同値

$$f: S^{2n_1+1}\times\cdots\times S^{2n_l+1}\simeq_0 G$$

が存在する．即ち，G は0-正則である．

［証明］　$H^*(G;\ \boldsymbol{k})=\Lambda(x_{2n_1+1}, \cdots, x_{2n_l+1})$. i に関する帰納法で，写像 f_i で，

$$f_i: S^{2n_i+1}\longrightarrow G,\ f_i{}^*(x_{2n_i+1})\neq 0$$

をみたすものの存在をいう．$i=0$ では自明と考えてよい．$f_1, \cdots, f_i$ まで存在したとし，$Y_i=S^{2n_1+1}\times\cdots\times S^{2n_i+1}$ とおく．G の積を用いて，

$$F=f_1\cdots f_i:\ Y_i\longrightarrow G \Longleftrightarrow F(x_1,\ \cdots,\ x_i)=f_1(x_1)\cdots f_i(x_i)$$

とおく．簡単のために，$k=2n_{i+1}+1$ とおく．$F^*: H^*(G;\ \boldsymbol{k})\to H^*(Y_i;\ \boldsymbol{k})$ $\cong \Lambda(x_{2n_1+1},\cdots,\ x_{2n_i+1})$ は全射となるから，必要ならば生成元 $x_k,\ \cdots,\ x_{2n_l+1}$ をとりかえて，

$$\mathrm{Ker}\ F^*=(x_k,\ \cdots,\ x_{2n_l+1}\text{で生成されるイデアル})$$

となる．写像柱を使って，$Y_i\subset G$ と考えてよい．$0<j<k$ のとき $H_j(G,\ Y_i;\boldsymbol{k})$ $=H^j(G,\ Y_i;\ \boldsymbol{k})=0$，従って，$H_j(G,\ Y_i)\in\mathscr{F}$ (有限群のクラス)．定理 1.11(2) を使えば，$\Xi:\pi_k(G,\ Y_i)\to H_k(G,\ Y_i)$ は $\mathscr{F}$-同型であることがわかる．完全系列

$$\pi_k(G)\xrightarrow{j_*}\pi_k(G,\ Y_i)\xrightarrow{\partial_*}\pi_{k-1}(Y_i)$$

において，$\pi_{k-1}(Y_i)\cong\sum_{j<i}\pi_{k-1}(S^{2n_j+1})$ は定理 6.10 により有限群である．従って，$\alpha\in\pi_k(G)$ で $<x_k, \Xi j_*(\alpha)>\neq 0$，即ち，$\alpha$ を表わす写像 $f_{i+1}: S^k\to G$ について，$f_{i+1}{}^*(x_k)\neq 0$ となるものがとれる．

帰納法によって，$f_1,\ \cdots,\ f_l$ が存在し，$f=f_1\cdots f_l$ は求める 0-同値であることがわかる．(終)

系 6.28 $H_*(\Omega G;\ \boldsymbol{k})\cong H^*(\Omega G;\ \boldsymbol{k})=\boldsymbol{k}[y_{2n_1},\ \cdots,\ y_{2n_l}]$

［証明］ 系 2.6 より $H_*(\Omega S^{2n+1};\ \boldsymbol{k})=\boldsymbol{k}[e_{2n}]$．従って，定理 2.18 により，$H^*(\Omega S^{2n+1};\ \boldsymbol{k})=\boldsymbol{k}[y_{2n}]$．定理 6.27 より，$\Omega f$ は 0-同値．Künneth の公式を使って系がえられる．(終)

系 6.29 標数 0 の係数体に関する Poincaré 級数 $P(\ ,\ t)$ について，

$$P(G,\ t)=(1+t^{2n_1+1})\cdots(1+t^{2n_l+1})$$

$$P(\Omega G,\ t)=(1-t^{2n_1})^{-1}\cdots(1-t^{2n_l})^{-1}$$

あ と が き

上巻を書くにあたっては，できるだけ予備知識を必要とせぬよう努力したつもりであったが，位相幾何学，特に(コ)ホモロジー論や多様体については詳述する予裕がなかった．以下に参考文献と若干の補足を述べる．

(1) 参考文献

まず，代数的位相幾何学全般については，次を参照されたい：

[1] 小松-中岡-菅原：位相幾何学Ⅰ，岩波書店，1967,

[2] E.H. Spanier: Algebraic topology, McGraw-Hill Book Company, 1966,

[3] R.M. Switzer: Algebraic topology—Homotopy and Homology, Springer, 1977.

以下，各章に述べられている事柄に関係する文献を挙げる．もちろん，これらの外にも良書は多いことと思う．

第1章

本章は殆んど予備知識を必要とせぬところではあるが，位相空間論については用語と基礎的事実を断わりなしに使った所がある．これらについては例えば次のものを参照されたい：

[4] ケリー：位相空間論，(児玉訳)，吉岡書店.

この章の他の事項，位相群，線型代数学，古典群，等については，好著も多いが，例えば

[5] ポントリャーギン：連続群論 上，下，(杉浦-柴岡訳)，岩波書店，

[6] 村上信吾：連続群論の基礎，基礎数学シリーズ25，朝倉書店，1973,

[7]　佐武一郎：線型代数学，裳華房，1976,

[8]　横田一郎：群と位相，裳華房，1971,

[8]′ 横田一郎：群と表現，裳華房，1973,

[9]　C. Chevalley: Theory of Lie groups I, Princeton Univ. Press, 1946,

等がある．微分多様体と Lie 群については，

[10]　滝沢精二：多様体，筑摩書房，1971,

[11]　松島与三：多様体入門，裳華房，1965,

[11]′ 松島与三：リー環論，共立出版，1956,

[12]　J.F. Adams: Lie groups, Benjamin, 1965.

第 2 章

ファイバーバンドルについては，[1],[2],[3]にも記述されているが，次の

[13]　スチーンロッド：ファイバー束のトポロジー，(大口訳)，吉岡書店，

は今や，古典的名著で一読に値する．分類空間については，

[14]　戸田-三村：ホモトピー論，紀伊國屋数学叢書 3, 紀伊國屋書店, 1975,

の第 5 章およびそれに関するところを読まれたい．

本章にある Lie 群と Lie 環の関係については [6],[11]，および

[15]　岩堀長慶：Lie 群論 I，II，岩波講座現代応用数学．岩波書店，1957,

[16]　伊勢幹夫：Lie 群 I，岩波講座基礎数学，岩波書店，1977,

等を参照されたい．

第 3 章

Serre のスペクトル系列については[1],[2]にもあるが，次の Serre の原論文を一読することをすすめる：

[17]　J-P. Serre: Homologie singulière des espaces fibrés, Ann. Math., 54 (1951), 425-505.

古典群，その等質空間のコホモロジー，特性類等については，

[18]　A. Borel: Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogènes de groupes de Lie compacts, Ann. Math., 57 (1963), 115-207,

[19] A. Borel: Sur l'homologie et la cohomologie des groupes de Lie compacts connexes, Amer. J. Math., 76(1954), 273-342,

[20] A. Borel: Topics in the homology theory of fibre bundles, Springer Lecture notes in Math., 36(1967),

[21] N.E. Steenrod: Cohomology operations., Ann. Math. Studies 50 (1962).

さらに，次のものはこれらを代数幾何学へ応用したものとして興味深い：

[22] ヒルツェブルフ：代数幾何における位相的方法，(竹内訳)，吉岡書店.

第4章

Serre の $\mathcal{C}$-理論については原論文

[23] J-P. Serre: Groupes d'homotopie et classes de groupes abéliens, Ann. Math., 58(1965), 258-294,

を一読することをすすめる．Hopf 代数の(位相幾何学的)一般論については

[24] J. Milnor-J.C. Moore: On the structure of Hopf algebras, Ann. Math., 81(1965), 211-264,

および H-空間との関係については[20]も参照されたい．

Bott の周期性の代数的証明は，

[25] Seminaire H. Cartan: Périodicité des groupes d'homotopie stables des groupes classiques, d'après Bott, (1959/60),

[26] E. Dyer-R. Lashof: A topological proof of the Bott periodicity theorems, Ann. Mat. Pure Appl., 54(1961), 231-254,

[27] H. Toda: A topological proof of theorems of Bott and Borel-Hirzebruch for homotopy groups of unitary groups, Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, 32(1959), 103-119,

[28] R. Wood: Banach algebras and Bott periodicity, Topology 4 (1965/66), 371-379,

等がある．また，Bott の周期性の Morse 理論による証明については，次のものを参照されたい：

[29] R. Bott: The stable homotopy of the classical groups, Ann.

Math., 70(1959), 313-337,

[30] ミルナー：モース理論，(志賀訳)，吉岡書店.

K-理論については

[31] 荒木捷朗：一般コホモロジー，紀伊國屋数学叢書 4，紀伊國屋書店，1975,

[32] M.F. Atiyah: K-theory, Benjamin, 1967,

[33] R. Bott: Lectures on $K(X)$, Harvard Univ., 1963,

[34] M.F. Atiyah-F. Hirzebruch: Vector bundles and homogeneous spaces, Proc. Sym. Pure Math., 3, A.M.S.,(1961), 7-38.

Lie 群の p-正則性およびその一般化については，

[35] M. Mimura-H. Toda: Cohomology operations and the homotopy of compact Lie groups, I, Topology, 9(1970), 317-336,

[36] S. Oka: On the homotopy groups of sphere bundles over spheres, J. Sci. Hiroshima Univ., 33(1969), 161-195,

[37] M. Mimura-G. Nishida-H. Toda: Mod p decomposition of compact Lie groups, Publ. RIMS of Kyoto Univ., 13(1977), 627-680.

(2) de Rham コホモロジー

M は n 次元微分多様体，$T_x{}^*M$ は $x\in M$ における接空間 T_xM の双対空間とする.

$C^i_{DR}(M)=\{w$: M 上の i 次外微分形式 $M\to\bigcup_{x\in M}\Lambda^i(T_x{}^*M)\}$，ただし，$\Lambda^i(T_x{}^*M)$ は $T_x{}^*M$ 上の外積代数の i 次の部分(積は $\wedge$ で表わされる)，

$C^*_{DR}(M)=\sum_{0\leq i\leq n} C^i_{DR}(M)$ ($\boldsymbol{R}$ 上の無限次元多元環)

とおく．このとき，

(2.1) 線型写像 $d: C^*_{DR}(M)\to C^*_{DR}(M)$ が一意的に存在して次の性質をみたす (d は外微分といわれる)：

(1) $C^0_{DR}(M)\ni f$ について df は f の微分(1次外微分形式)，

(2) $d(C^i_{DR}(M))\subset C^{i+1}_{DR}(M)$，$0\leq i\leq n$

(3) $d\circ d=0$

(4) α, $\beta\in C^*_{DR}(M)$ に対して，$d(\alpha\wedge\beta)=(d\alpha)\wedge\beta+(-1)^{|\alpha|}\alpha\wedge d\beta$

$$Z^i_{DR}=\{\omega\in C^i_{DR}(M)\,|\,d\omega=0\},\quad B^i_{DR}=\{d\omega\in C^i_{DR}(M)\,|\,\omega\in C^{i-1}_{DR}(M)\}$$

とおくと，(2.1) (3)により，$B^i_{DR}\subset Z^i_{DR}$ であり，代数的に次のコホモロジー群

$$H^i_{DR}(M)=Z^i_{DR}/B^i_{DR}$$

が定義される．これを多様体 M の **de Rham コホモロジー**という．

(2.2) パラコンパクトな M について次の同型がある：

$$\varphi: H^*_{DR}(M)\cong H^*(M;\ \boldsymbol{R})$$

対応 $\varphi: H^i_{DR}(M)\to H^i(M;\ \boldsymbol{R})=\mathrm{Hom}(H_i(M),\ \boldsymbol{R})$ は，次の外微分形式 ω と i 次の特異サイクル C に対して

$$\varphi(\omega)(C)=\int_C\omega \quad (C\text{ 上の }\omega\text{ の積分})$$

と定義する．詳細はたとえば次のものを参照されたい：

[38] 河田敬義編：位相幾何学，現代数学演習叢書，岩波書店，1965,

[39] S.T. Hu: Differentiable manifolds, Holt, Rinehart and Winston Inc., 1969.

(3) 双対定理

位相空間 X について，$X\supset A\supset B$ とする．対 $(A,\ B)$ の近傍 $(U,\ V)$ ($\Longleftrightarrow U,\ V$ はそれぞれ A, B の近傍) の集合 $\{(U,\ V)\}$ は射入により帰納的系をなすから，集合 $\{H^i(U,\ V;\ R)\,|\,(U,\ V)$ は $(A,\ B)$ の近傍$\}$ の帰納的極限 $\lim H^i(U,\ V;\ R)$ が考えられる．そこで

$$H^i_N(A,\ B;\ R)=\varinjlim H^i(U,\ V;\ R) \quad (R\text{ は係数環})$$

と定義する．この定義のもとに (G は R-加群)

(3.1) (Alexander の双対定理) $\boldsymbol{R}^n\supset A$ はコンパクト集合とするとき，

$$\tilde{H}_q(\boldsymbol{R}^n-A;\ G)\cong H_N{}^{n-q-1}(A;\ G)$$

さらに，一般の可符号な n 次元多様体 M^n について

(3.2) $(A,\ B)$ が M^n のコンパクト対ならば

$$H_q(M^n-B,\ M^n-A;\ G)\cong H_N{}^{n-q}(A,\ B;\ G)$$

M^n がコンパクトの場合 $H_N{}^q(M^n;\ G)\cong H^q(M^n;\ G)$ であるから，(M^n, ϕ) に (3.2)を適用して(第7章，§3参照)

(3.3) (Poincaré の双対定理) M^n がコンパクトのとき

$$H_q(M^n;\ G)\cong H^{n-q}(M^n;\ G)$$

(M^n, A) は相対 n 次元多様体 ($\Longleftrightarrow M^n$ は Hausdorff, A は閉集合, M^n-A は n 次元多様体) とするこのとき

(3.4) (Lefschetz の 双対定理) (M^n, A) はコンパクト相対 n 次元多様体で M^n-A が可符号ならば

$$H_q(M^n-A;\ G)\cong H_N{}^{n-q}(M^n,\ A;\ G)$$

M^n は境界 ∂M^n をもつ n 次元多様体($\Longleftrightarrow M^n$ はパラコンパクト, Hausdorff で $(M^n, \partial M^n)$ は相対 n 次元多様体, かつ任意の $x\in M^n$ は近傍 V をもち $(V, V\cap\partial M^n)\cong \boldsymbol{R}^{n-1}\times(I, 0))$ とする. 境界 ∂M^n をもつ n 次元多様体 M^n が可符号 $\Longleftrightarrow M^n-\partial M^n$ が可符号, と定義するとき

(3.5) (Lefschetz の双対定理) M^n がコンパクト n 次元多様体で 境界 ∂M^n をもち, 可符号とするとき

$$H_q(M^n;\ G)\cong H^{n-q}(M^n,\ \partial M^n;\ G)$$

$$H_q(M^n,\ \partial M^n;\ G)\cong H^{n-q}(M^n;\ G)$$

$\partial M^n=\phi$ のときが Poincaré の双対定理 (3.3) である.

これらの双対定理については Spanier[2]に詳しく書かれている.

(4) 特性類

n 次元微分多様体 M^n は $\boldsymbol{R}^{n+k}$ にはめこまれている (immersed) とする. 実 Grassmann 多様体 $G_{n,k}(\boldsymbol{R})=\{\boldsymbol{R}^{n+k}$ の n 次元部分空間$\}$について, (一般化された) Gauss 写像 φ を

$\varphi: M^n\to G_{n,k}(\boldsymbol{R})\Longleftrightarrow\varphi(x)=(x\in M^n$ における接平面に平行な原点を通る $\boldsymbol{R}^{n+k}$ の n 次元部分空間)

と定義する. $G_{n,k}(\boldsymbol{R})$ 上の n 次元ベクトルバンドルを $\gamma_k{}^n=(E(\gamma_k{}^n),\ p,\ G_{n,k}(\boldsymbol{R}),\ \boldsymbol{R}^n)$ と表わす. ただし $E(\gamma_k{}^n)=\{$(原点を通る n 次元部分空間, その空間におけるベクトル)$\}$.

M^n の接バンドルを τ_M とするとき

(4.1) バンドル写像 $f: \tau_M\to\gamma_k{}^n$ が存在して, その底空間の間の写像は Gauss 写像 $\varphi: M^n\to G_{n,k}(\boldsymbol{R})$ である.

$G_n(\boldsymbol{R})=G_{n,\infty}(\boldsymbol{R})=\{\boldsymbol{R}^\infty$ における n 次元部分空間$\}$

$\gamma^n=\gamma_\infty{}^n=(E(\gamma^n),\ p,\ G_n(\boldsymbol{R}),\ \boldsymbol{R}^n)$

$E(\gamma^n)=\{(\boldsymbol{R}^\infty$ の n 次元部分空間，その空間におけるベクトル$)\}$
とおくとき，$G_n(\boldsymbol{R})=BGL(n,\ \boldsymbol{R})$（または$=BO(n)$）と考えられることから，

(4.2) パラコンパクトな X 上の任意の n 次元実ベクトルバンドル ξ に対してバンドル写像 $f:\xi\to\gamma^n$ が存在して，その底空間の間の写像は Gauss 写像である．

ここで $H^*(G_n(\boldsymbol{R});\ \boldsymbol{Z}_2)=H^*(BO(n);\ \boldsymbol{Z}_2)=\boldsymbol{Z}_2[w_1,\ \cdots,\ w_n]$ である．(4.2) のバンドル写像の底空間の間の写像 $\bar{f}$ によって誘導される準同型

$$\bar{f}^*:H^*(G_n(\boldsymbol{R});\ \boldsymbol{Z}_2)\longrightarrow H^*(X;\ \boldsymbol{Z}_2)$$

に対して $\bar{f}^*(w_i)=w_i(\xi)$ $(0\leq i\leq n)$，$w(\xi)=1+w_1(\xi)+\cdots+w_n(\xi)$，$w_0(\xi)=1$，とおくと次の性質がみたされる：

(4.3.1) $h:X\to Y$ について $h^*(w(\xi))=w(h^\#\xi)$

(4.3.2) Whitney 和 $\xi\oplus\xi$ に対して $w(\xi\oplus\xi)=w(\xi)w(\xi)$，即ち，

$$w_k(\xi\oplus\xi)=\sum_{i+j=k}w_i(\xi)w_j(\xi)$$ （第 3 章，定理 5.11 (3) に対応する）

(4.3.3) $S^1=P^1(\boldsymbol{R})$ 上の自明でない 1 次元ベクトルバンドル ξ に対して $w_1(\xi)\neq 0$

$w_i(\xi)$，$w(\xi)$ をそれぞれ ξ の $\boldsymbol{i}$ **次 Stiefel-Whitney 類**，**全 Stiefel-Whitney 類**という．(4.3.1)～(4.3.3) によって逆に Stiefel-Whitney 類を特徴づけることができる．また，微分多様体 M^n の接バンドル τ_M に対して $w_i(M^n)=w_i(\tau_M)$，$w(M^n)=w(\tau_M)$ とおいて，M^n のそれぞれ $\boldsymbol{i}$ **次 Stiefel(-Whitney) 類**，**全 Stiefel(-Whitney) 類**という．

複素数の場合についても同様なことが成り立つ．即ち，複素 Grassmann 多様体 $G_n(\boldsymbol{C})=\{\boldsymbol{C}^\infty$ の n 次元部分空間$\}$ 上の n 次元複素ベクトルバンドルを $\gamma^n(\boldsymbol{C})=(E(\gamma^n(\boldsymbol{C})),\ p,\ G_n(\boldsymbol{C}),\ \boldsymbol{C}^n)$ とおく．ただし，$E(\gamma^n(\boldsymbol{C}))=\{(n$ 次元部分空間，その空間におけるベクトル$)\}$．このとき，$G_n(C)=BGL(n,\ \boldsymbol{C})$（または $BU(n)$）であり，

(4.2)′ パラコンパクトな X 上の任意の n 次元複素ベクトルバンドル ξ に対してバンドル写像 $f:\xi\to\gamma^n(\boldsymbol{C})$ が存在して，その底空間の間の写像は Gauss 写像である．

ここで $H^*(G_n(\boldsymbol{C});\ \boldsymbol{Z})=H^*(BU(n);\ \boldsymbol{Z})=\boldsymbol{Z}[c_1,\ \cdots,\ c_n]$ である．(4.2)′のバンドル写像の底空間の間の写像 $\bar{f}$ により誘導される準同型

$$\bar{f}^*: H^*(G_n(\boldsymbol{C});\ \boldsymbol{Z}) \longrightarrow H^*(X;\ \boldsymbol{Z})$$

に対して，$\bar{f}^*(c_i)=c_i(\zeta)$，$(0\leq i\leq n)$，$c(\zeta)=1+c_1(\zeta)+\cdots+c_n(\zeta)$，$c_0(\zeta)=1$ とおくと次の性質がみたされる：

(4.3.1)′　$h: X\to Y$ について，$h^*(c(\zeta))=c(h^{\#}\zeta)$

(4.3.2)′　Whitney 和 $\zeta\oplus\xi$ に対して $c(\zeta\oplus\xi)=c(\zeta)c(\xi)$，即ち，

$$c_k(\zeta\oplus\xi)=\sum_{i+j=k} c_i(\zeta)c_j(\zeta)$$ （第３章，定理 5.8(3)に対応する）

(4.3.3)′　$S^2=P^1(\boldsymbol{C})$ 上の自明でない直線バンドル ξ に対して，$c_1(\xi)\neq 0$.

$c_i(\zeta), c(\zeta)$ をそれぞれの **i 次 Chern 類**，**全 Chern 類**という.

逆に，(4.3.1)′～(4.3.3)′ により Chern 類を特徴づけることができる.

n 次元実ベクトルバンドル ζ に対して，その複素化 ζ_C を考えて，

$$p_i(\zeta)=(-1)^i c_{2i}(\zeta_C),\quad p_0(\zeta)=1$$

$$p(\zeta)=1+p_1(\zeta)+\cdots+p_m(\zeta),\quad m=[n/2]$$

とおいて，ζ のそれぞれ **i 次 Pontrjagin 類**，**全 Pontrjagin 類**という．このとき，

(3.4)　$p(\zeta\oplus\eta)-p(\zeta)p(\eta)$ は位数２の元の和である.（第３章，定理 5.17 参照）

以上の事実については次のものを読むことをすすめる：

[40]　J. Milnor: Lectures on characteristic classes,(mimeographed notes) 1957.

(5)　障害理論

一般の障害理論については[1],[2]を参照して貰うことにして，ここでは，ファイバーバンドル $\xi=(E, p, B, F)$ の切断に関する障害コサイクルと上述の特性類についての関係をみる．ただし，簡単の為に，B は 1-連結有限多面体，F は単純であると仮定する.

このバンドル ξ の切断 $s: B\to E(\Longleftrightarrow p\circ s=1_B)$ を B の q-切片 $B^{(q)}$ に関する帰納法で構成することを考える．今，切断が $B^{(q)}$ まで与えられており，それを $B^{(q+1)}$ に拡張することを考えるが，その為には，$B^{(q+1)}$ の任意の $(q+1)$-胞体 e について $s|\partial e$ を e に拡張すればよい．e は可縮であるから $\xi|e$ は積バンドルで，従ってバンドル写像 $\phi_e: e\times F\to E_e$（ξ の e 上の部分）と写像 $p_e: E_e\to F$ が存在して $\phi_e(p(x),\ p_e(x))=x$，$x\in E$，が成り立つ．このとき

(5.1)　切断 $s|\partial e$ が e への切断に拡張可能 $\Longleftrightarrow s|\partial e$ が写像 $e\to E_e$ へ拡張可能.

実際，$s' : e\to E_e$ を $s|\partial e$ の拡張とするとき，$s''(x)=\phi_e(x,\ p_e s'(x))$ とおけば，s'' は $s|\partial e$ の拡張である切断である.

次に $x\in e$ 上のファイバー F_x について射入 $F_x\subset E_e$ は同型 $\pi_i(F_x)\cong\pi_i(E_e)$ を与えるから，$s|\partial e$ は E_e において写像 $\bar{s} : \partial e\to F_x$ にホモトープであり，F_x における $\bar{s}$ のホモトピー類は E_e における $s|\partial e$ のホモトピー類のみに依存し，

$\bar{s}$ は $\tilde{s} : e\to F_x$ に拡張可能 $\Longleftrightarrow s|\partial e$ は e 上の切断に拡張可能

であることがわかる．今，s は $B^{(q)}$ 上の切断とするとき，$s|\partial e$ で表わされる $\pi_q(F_x)\cong\pi_q(F)$ の元を $c(s,\ e)$ と定義する．このとき

(5.2)　$B^{(q)}$ 上の切断 s が $B^{(q+1)}$ に拡張可能

$$\Longleftrightarrow \text{任意の } (q+1)\text{-胞体 } e \text{ について } c(s,\ e)=0.$$

さらに，$c(s)(e)=c(s,\ e)$ と定義して $c(s)$ を s の**障害コサイクル**とよぶ.

(5.3)　s を $\xi|B^{(q-1)}$ 上の切断とし，s は $B^{(q)}$ に拡張可能とする．このとき，s のすべての拡張 s' の $(q+1)$ 次元障害コサイクルの集合 $\{c(s')\}$ は単一のコホモロジー類 $\bar{c}(s)\in H^{q+1}(B;\ \pi_q(Y))$ をなし，

s は $B^{(q+1)}$ に拡張可能 $\Longleftrightarrow \bar{c}(s)=0.$

今，ζ を n 次元実ベクトルバンドル，$\zeta(q)=(E,\ p,\ B,\ V_{n,n-q}(\boldsymbol{R}))$ を ζ の同伴バンドルとする $(q<n)$．具体的には，$b\in B$ 上のファイバーにおける点は

$$(b,\ p^{-1}(b)\cong\boldsymbol{R}^n \text{ における枠 } (\boldsymbol{v}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{v}_{n-q}))$$

で与えられる．このとき，$\zeta(q)$ の切断に対する第1次障害は元 $o_{q+1}(\zeta)\in H^{q+1}(B;\ \pi_q(V_{n,n-q}(\boldsymbol{R})))$ である．ただし，$\pi_q(V_{n,n-q}(\boldsymbol{R}))\cong\boldsymbol{Z}$ または $\boldsymbol{Z}_2$．元 $o_{q+1}(\zeta)$ の mod 2 reduction $o_{q+1}(\zeta)_2$ について，次が成り立つ：

(5.4)　$o_{q+1}(\zeta)_2=w_{q+1}(\zeta)$

さらに ζ が可符号なとき，第3章，§3 の Euler 類 $\chi(\zeta)$ について，次が成り立つ：

(5.5)　$o_n(\zeta)=\chi(\zeta)$

同様にして，ζ が n 次元複素ベクトルバンドルの場合は，$\pi_{2q+1}(V_{n,n-q}(\boldsymbol{C}))\cong\boldsymbol{Z}$ であり，第1次障害 $o_{2q+2}(\zeta)\in H^{2q+2}(B;\ \pi_{2q+1}(V_{n,n-q}(\boldsymbol{C})))$ について次が成り立つ：

(5.4)′　$o_{2q+2}(\zeta)=\pm c_{q+1}(\zeta)$

切断の障害理論については［13］の第Ⅲ章が詳しい．また(5.4)，(5.5)の 証明については[40]を参照されたい．

索　引

ア 行

Eilenberg-MacLane
　——空間　153
　——複体　153
Adem の関係式　99
位相
　——群　1, 72
　——多様体　33
　——変換群　4
1助変数部分群 (one parameter subgroup)　36
Wu の公式　137
H-空間　66, 163, 170
　co-——　158
H-群　160
　co-——　160
Euler 類　115, 142

カ 行

階数 (rank)　218
　最大——(部分群)　146
型 (Lie 群の) (type of a Lie group)　218
Cartan の公式　99
Gysin 完全系列　114, 115
基本群 (fundamental group)　45
Künneth の公式　94, 97
極分解 (polar decomposition)　31, 33
クラス $\mathscr{C}$-理論 (Serreの)　152
KF-群　188, 190, 196
K-群　188, 200, 202
KO-群　188, 203, 205
KSp-群　188, 205, 206
原始的 (primitive)　170
古典群 (classical group)　20, 69, 115, 143
　射影——(projective——)　69
　無限次元——　175
コホモロジー
　——群(環)　95
　——作用素　98
　安定——作用素　99
de Rham——　223

サ 行

CW-複体　82
射影空間 (projective space)　9, 120, 122
周期性 (periodicity)　196, 200, 203, 205
　K-群の——　200, 202
　KO-群の——　203, 205
　KSp-群の——　205, 206
Stiefel-Whitney 類　136, 226
　全——　226
障害理論　227
初期ベクトル　36
symplectic 群　18, 19, 20
　複素——　20
　実——　20
symplectic Pontrjagin 類　132, 134
随伴 (adjoint)
　——写像　161
　——表現　78
Steenrod
　——の平方作用素 (——squaring operation)　99, 137
　——の素数巾作用素 (——reduced power operation)　99
spinor 群　71, 80, 173
　semi-——　72

スペクトル系列 (spectral sequence) 106, 107, 109, 110
正規
——化群 (normalizer) 2
——行列 21, 23
——直交基底 15
正則部分多様体 (regular submanifold) 35
接バンドル(空間) (tangent bundle) 35
接ベクトル(空間) (tangent space) 35
接ベクトル(場) (tangent vector field) 37, 75
切断 (cross section) 55
局所—— 55
mod p—— 214
Serre の
——完全系列 108
——スペクトル系列 106
線型
——Lie 群 41
一般——群 11
特殊——群 11
全体的非 0-ホモローグ (totally non-homologous to zero) 124
双対定理 224

タ　行

対称空間 (symmetric space) 142
既約—— 143
古典型—— 143
無限次元—— 177, 180
対称対 (symmetric pair) 142
多様体 34
位相—— 33
(可)微分—— 34
Chern
——指標 (——character) 192, 193
全——指標 193
——類 132, 134, 227
全——類 227
中心 (center) 2, 69, 71
中心化群 (centralizer) 2
直交群 15, 16
特殊—— 16
複素—— 18
無限次元—— 175
等質空間 (homogeneous space) 4, 5, 143
等方群 (isotropy group)＝安定化群 7
特性類 (characteristic class) 131, 225
Thom
——同型 114
——類 114
トーラス (torus) 25
極大—— 124
標準極大—— 25, 124

ハ　行

Harris の分解 215
被覆 (covering)
——空間 43, 45, 46
——変換群 47, 48
——ホモトピー性質 (——homotopy property) 61, 63
(バンドルの)——ホモトピー定理 57
正則——空間 49
普遍——空間 49
(普遍)——群 68
ファイバー空間 (fibre space) 61, 102
局所自明—— 51, 52
主—— 110
相対——(relative——) 103
Hopf—— 209
ファイバーバンドル (fibre bundle) 51, 53
主—— 55
相対—— 103
同伴—— 56

同伴主—— 56
n-普遍—— 84
複体 (complex)
胞——(cell——) 82
立方体的チェイン—— (cubical chain ——) 90, 91
普遍係数定理 94, 95
Puppe の完全系列 162
Hurewicz
——の準同型 150
——の定理 151
mod $\mathscr{C}$——の定理 155
(mod $\mathscr{C}$) Blakers-Massey の定理 156
(mod $\mathscr{C}$) Freudenthal の定理 157
分類空間 (classifying space) 86, 88, 143
分類定理 85, 86
ベクトルバンドル (vector bundle) 186
(——の)安定同値 190
共役——(conjugate——) 187
Poincaré
——級数 98
——多項式 98
Bockstein
——の完全系列 97
——準同型 97
mod p——準同型 97, 147
Bott
——の写像 196
——の周期性 202, 205, 206
Hopf 代数 (Hopf algebra) 168, 169
準——(quasi——) 168
ホモトピー (homotopy)
——拡張性質 (——extension property) 83
——完全系列 60
——群 59
——類 44
安定——群 211
準安定——群 211
(弱)——同値 (写像) (weak—— equivalence) 44, 83
ホモロジー群 (homology group) 93
局所係数(コ)—— 100, 101
J.H.C. Whitehead
——の定理 84
mod $\mathscr{C}$——の定理 155
Pontrjagin 類 138, 139, 227
全—— 227

ヤ　行

有限型 (of finite type) 98
ユニタリー群 16
特殊—— 16
無限次元—— 175

ラ　行

Lie 環 (Lie algebra) 74, 77
Lie 群 36, 77
Leray-Hirsch の定理 124
連結
n-—— 64
局所弧状—— 10
弧状—— 10
単—— 45

ワ　行

Weyl 群 25, 26, 127, 129
Wang の完全系列 165

著　　者

戸田　宏（とだ　ひろし）

1928年1月神戸市に生まれる．1951年大阪大学理学部数学科卒業．大阪市立大学理工学部助手，同講師，京都大学理学部助教授を経て，現在，京都大学理学部教授．

三村　護（みむら　まもる）

1938年1月香川県高松市に生まれる．1960年京都大学理学部数学科卒業．京都大学理学部助手，京都大学教養部助教授を経て，現在，岡山大学理学部教授．

リー群の位相（上）

定価 6000円

1978年12月20日　第1刷発行
1985年7月31日　第3刷発行

発行所　株式会社　紀伊國屋書店
東京都新宿区新宿3の17の7
電話　(354) 0131（代表）
振替口座　東京 9-125575

出版部　東京都世田谷区桜丘 5-38-1
電話　(439) 0125（代表）
郵便番号　156

ISBN 4-314-00237-9 C 3341
PRINTED IN JAPAN

印刷　研究社印刷
製本　三水舎

紀伊國屋数学叢書について

数学を学ぶにはいろいろの段階があるが，いずれの場合でも書物などによって自学自習することが最も重要であり，単に講義を聞くというような受動的な勉強だけでは，はなはだ不十分である．

みずから学ぶために現在いろいろな数学書が出版されている．しかし，数学の進歩は極めて基礎的な考え方に対してさえ常に影響を与えており，従ってどのような段階の勉強であっても，常に新しい考え方を理解することが必要である．このためには，数学の過去と将来とを結ぶ視点から書かれた書物が数多く出版されることが望ましい．即ち，新しい視点と古典的な視点とを見くらべ，基本的なことをも将来の発展を考慮した視点から説明するという立場で書かれた書物が要望されている．

本叢書はこのような要望に応えて企画されたものであって，各巻が大学理工学系の専門課程の学生または大学院学生がそれぞれの分野での話題，対象について入門の段階からある程度の深さまで勉学するための伴侶となることを目指している．このために我々は各巻の話題の選択について，十分配慮し，現代数学の発展にとって重要であり，また既刊書で必ずしも重点が置かれていないものを選び，各分野の第一線で活躍しておられる数学者に執筆をお願いしている．

学生諸君および数学同好の方々が，この叢書によって数学の種々の分野における基本的な考え方を理解し，また基礎的な知識を会得することを期待するとともに，更に現代数学の最先端へ向かおうとする場合の基礎ともなることを望みたい．